التحليل المركب وتطبيقاته

تأليف

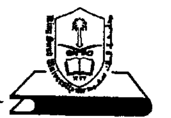
وليام ر. دريك

ترجمة

د. سعدون إبراهيم عثمان البراهيم و د. أبوبكر الصديق بيومي

قسم الرياضيات ـ كلية العلوم

جامعة الملك سعود



النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

كلمة المترجمان

يعتبر هذا الكتاب من الكتب الغنية بالتطبيقات المنوعة في مجال التحليل المركب، وهي تطبيقات يحتاج إليها طلاب العلوم والهندسة وغيرهم، وهذا أحد الأسباب التي دفعتنا إلى ترجمته.

لقد بذلنا جهدا متواضعا لإخراجه على ما هو عليه، مستخدمين أسلوبا مبسطا، وواضعين في اعتبارنا عدم الخروج عن النص أثناء الترجمة.

هذا وقد وضعنا ثبت للمصطلحات العلمية في نهاية الكتاب، متوخين أكثرها انتشارا في الوطن العربي.

ونود في هذا المقام أن نشكر الدكتور إبراهيم ديب سرميني والسيد علي رفعت لمراجعتهما هذا الكتاب.

نأمل من الله سبحانه وتعالى أن يتقبل عملنا هذا وأن تتحقق الفائدة التي ينشدها طلال العلم، والله الموفق والهادي إلى سواء السبيل.

المترجمان

مقدمة المؤلف

التحليل المركب واحد من أكثر فروع الرياضيات تشويقا ونجاحا ، فنتائجه تساعد على إثبات نظريات مهمة ، وتفتح آفاقا لعدة مفاهيم في مجالات أخرى للرياضيات ، وتعتمد كثير من الطرق الفعالة المستخدمة في تطبيقات الرياضيات في الهندسة والعلوم الأخرى على نظرية الدوال المركبة.

كما يعطي التحليل المركب مقدمة ممتازة للرياضيات المعاصرة بسبب سعة تطبيقاته وجمعه بين المفاهيم الهندسية والتحليلية ، ويُسر الكثير من نتائجه.

تعد التطورات الحديثة في نظرية الدالة المركبة ونظرية المتغيرات المركبة بإعطاء تطبيقات مفيدة في كثير من مجالات الهندسة.

وأحد أهدافي من كتابة هذا الكتاب هو الوصول لموضوع التكامل المركب بأسرع وقت ممكن ، وهذا يتطلب تأخير معالجة الخواص الهندسية للدوال الأولية ، وللوصول إلى صلب الموضوع بسرعة اعتمدت على ميزات ؛ منها : أن التطورات اللاحقة تكون أغنى في التطبيقات وأهم في معالجتها للمتسلسلات وللنقاط الشاذة والتكامل على مسار ، بالإضافة إلى تأجيل عرض الخواص الهندسية ويعوّض عنه النظر إليها كدوال حافظة للزوايا ، ويحقق ذلك ربطا أفضل للموضوعات يوفر وقتا يمكن استثماره في موضوعات أخرى.

وقد هدفت أيضا من كتابة هذا الكتاب إلى تقديم خيارات من التطبيقات أوسع ، ومدى من الطرائق أشمل مما تشتمل عليه الكتب التقليدية عادة.

وضمنت هذا الكتاب تطبيقات في علم البصريات، وانسياب النفاثات والأعقاب إضافة إلى الأمثلة المعهودة في علم الموائع، وانتقال الحرارة والكهرباء الساكنة. وتعطي طرق التكامل على مسار خلفية ملائمة لحساب أقطاب Regge وتحولات لابلاس العكسية.

يحتوي الكتاب على تحولات التكامل، وهذا موضوع يدرس دائما في إطار المتغير الحقيقي، ولكنه يأخذ بعدا ذا أهمية أكبر عندما يدرس في إطار المتغيرات المركبة.

وليس المقصود تغطية كل هذه الموضوعات في الفصل ولكنها عرضت كي يصمم منها المدرس مقررا يلائم رغباته.

تنظيم الكتاب وتغطيته

قصد من هذا الكتاب أن يكون كتابا لمقرر التحليل المركب لفصل واحد لطلاب المستوى الثالث، ومادة الكتاب أكثر من ذلك بكثير، مما يتيح للمدرسين انتقاء الموضوعات التي يرونها أكثر أهمية.

تحوي الفصول من الأول إلى الخامس معظم المادة التي تغطي مقررا أوليا خلال فصل واحد. وعلى المحاضرين الذين يريدون أن يقللوا من الجانب النظري، ألا يعيروا بالا للأجزاء الاختيارية (٢,٥)و (٣,٥). أما الذين يريدون إغفال التطبيقات المطولة، فعليهم أن يتحاشوا الأجزاء الاختيارية (١,١٠)، (٤,٥)، (٥,٧) و(٥,٨).

هذا وقد ضمنت معالجة موجزة للدوال التوافقية في الجزء الأول (٦,١). ويمكن أن تدرس بعد تقديم الجزء (٢,٣).

الفصل السادس مقدمة للتحولات التكاملية في إطار المتغير المركب، ونأمل أن يختار بعض المحاضرين تقديم بعض هذه الموضوعات في برنامج مقرراتهم.

وتعد التحولات التكاملية طرقا مؤثرة في العلوم والهندسة. والمقدمة كافية لتهيئة الطلاب لمقررات متقدمة في الرياضيات التطبيقية.

ويمكن أن يشمل برنامج لمقرر فصلي واحد ما يأتي :

لطلاب الرياضيـــات: الفصول من ١ إلى ٥ متضمنة الأجزاء (٢,٥) و(٣,٥)، مع الأجزاء (٦,٢) و(٦,٥).
أما بالنسبة لطلاب الهندسة فيحتوي علـى: الفصـول من ١ إلى ٥ متضمنـة الأجـزاء (١٠,٥) أو (٤,٥) أو (٥,٧) و(٥,٨) مع الأجزاء (٦,١) مع (٦,٣) أو (٦,٧) أو (٦,٦).

المستوى

لقد وضع الكتاب لطالب هندسة "متوسط"، وقد أوليت عناية خاصة لشرح كل فكرة بأوضح ما يمكن مع التمهيد لكل فكرة أو نقاش.
يحوي كل جزء عددا من الأمثلة المحلولة بالكامل. بالنسبة للإثباتات الأكـثر صعوبة. وضعت بجانبها العلامة (+)، وكذلك وضعت في الفصـول الاختيارية. ويمكن أن يستخدم الكتاب في مستويات مختلفة ويعتمد ذلك على الأجزاء المختارة والأمثلة.

الدقة والوضوح

راجع المؤلف وآخرون معه جميع الأمثلة والأجوبة في هذا الكتاب بعناية وذلـك لتفادي الأخطاء. وأكون شاكرا لكم توجيه انتباهي إلى أي خطأ لم نتنبه إليه، كما أتعهد أن أنفذ جميع التصحيحات في النسخة القادمة من هذا الكتاب.

الأمثلة

يوجد في كل جزء عدد كبير من الأمثلة، تتراوح بين الأمثلة المباشرة والتطبيقات الأكثر تعقيدا وقد فصلت الأمثلة عن الموضوعات الأخرى بوجود فراغ.

التمارين

قد اتخـذت عناية خاصة في إعداد مجموعة التمارين لضمان إعطاء كل تمرين خبرة تعليمية قيمة.

يشار إلى التمارين الأكثر صعوبة بالعلامة (*). وتحوي كل مجموعة كمية وافية من التمارين رتبت ترتيبا متدرجا حسب الصعوبة. كما تحتوي بعض التمارين على نتائج مفيدة، ونناشد المحاضرين أن يختاروا باهتمام تلك الأكثر فائدة للفصل. هذا وقد قدمت الحلول للتمارين ذات الأرقام الفردية، وهي ليست أجوبة سهلة ولا حلولا كاملة، لكنها توضح الاتجاه الذي يمكن أن يؤخذ للحصول على الجواب المعطى ونناشد الطلاب المحاولة بأنفسهم وإبداء أفكارهم قبل استخدام التوضيحات المعطاة. ويتوافر لدى الناشر منهاج يحوي الحلول الخاصة بالتمارين الزوجية.

ملاحظات الفصل

يوجد في نهاية كل فصل عرض موجز لنتائج أخرى ومصادر مكمّلة. ونناشد الطلبة الراغبين في المعرفة اختيار ما يرونه مناسبا للوصول إلى مدى أعمق للمادة.

جدول الرموز والملاحق

وضعنا بعد هذه المقدمة جدولا للرموز المستخدمة في هذا الكتاب. وتحوي الملاحق عند نهاية هذا الكتاب جداول للدوال الحافظة للزوايا، كما تحوي تحولات لابلاس ومراجع موجزة للتكامل الخطي ونظرية جرين.

ويختتم المؤلف المقدمة بالشكر لكل من أسهم في مراجعة عدة صور من هذه الطبعة.

وليام ديرك

المحتويات

صفحة

صفحة

الفصل الثاني: التكامل المركب

الفصل الثالث: المتسلسلات اللانهائية

الفصل الرابع: التكاملات على مسار

صفحة

صفحة

الملاحق

الفصل الأول

الـدوال التحليليــة

ANALYTIC FUNCTIONS

أول من قدم الأعداد المركبة غيرولامو كاردانو (Girolamo Cardano) في مقالة مهمة لحل معادلات من الدرجة الثالثة والرابعة في عام ١٥٤٥م بعنوان Ans Magna. ولتقدير جرأة هذا الاقتراح يجب على الفرد أن يدرك أن مفهوم الأعـداد السـالبة بـدأ يلقـى قبـولا مـع بعض الملاحظات حول خواصها ظهرت من هنا وهناك.

كـانت كميـات كـاردانو Cardano المصطنعـة مهملـة مـن أغلـب الريـاضيين إلى أن جاء العالم الرياضي الفذ كارل فريدريشت Carl Fridrich فأعطى الاسم الحالي للأعداد المركبة واستخدمها في إثبات النظرية الأساسية في الجبر التي تنص على أن أي كثيرة حدود غير ثابتة لها على الأقل جذر واحد.

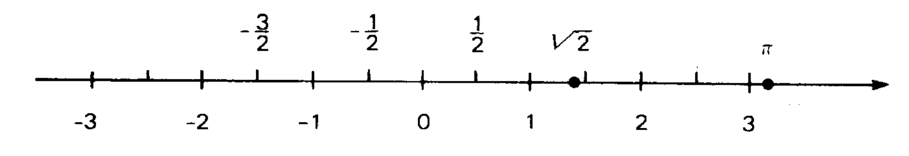
سنبحث في هذا الكتاب خواص الأعداد المركبة والدوال ذات القيمة المركّبة، وسوف نرى أن نظرية دوال المتغير المركّب تعمم مفهوم حساب التفاضل والتكامل إلى الحقل المركّب.

يضفــي التفــاضل والتكــامل بثوبــه الجديــد عمقــا وجمــالا جديــدا علــى الرياضيـات، فضـلا علـى أن طبيعـة المتغير المركّـب تقـدم نتـائج مفيـدة في الرياضيـات التطبيقية.

(١ , ١) الأعداد المركّبة وجبرها

Complex Numbers and their Algebra

تسمى الأعداد التي تستخدم في الجبر البدائي في حساب التفاضل والتكامل أعداد"حقيقية تتكون من جميع الأعداد التي يمكن تمثيلها هندسيا بوساطة نقاط على خط مستقيم لانهائي في الطول (انظر الشكل رقم ١,١).



الشكل رقم (١ , ١) نموذج لنظام الأعداد الحقيقية.

الخط المستقيم مقسم إلى مسافات متساوية بحيث يقابل كل قسم عددا طبيعيا، مع ملاحظة أن الأعداد الموجبة تقع على يمين الصفر والأعداد السالبة على يساره. كل عدد حقيقي تمثله نقطة وحيدة تقع على هذا الخط وتحقق الأعداد الحقيقية خمس قواعد جبرية تسمى مسلمات الحقل وهي:

١ – قانون التبديل

$ab = ba$ و $a + b = b + a$

٢ – قانون التجميع (الدمج)

$(a+b)c = ac + bc$ و $(a+b)+c = a+(b+c)$

٣ – قانون التوزيع

$(a+b)c = ac + bc$ و $a(b+c) = ab + ac$

٤ – عنصر الوحدة

وحدة الجمع 0 ، ووحدة الضرب 1، $1 \neq 0$

بحيث إن: $a.1 = a = 1.a$ و $a + 0 = a = 0 + a$

٥ – المعكوس

كل عدد حقيقي a له معكوس جمعي $(-a)$ ، وإذا كان $a \neq 0$ فله معكوس ضربي a^{-1} يحقق :

$$a+(-a)=0=(-a)+a$$

و

$$a.a^{-1}=1=a^{-1}.a$$

وينقص الأعداد الحقيقية أصلا شيء واحد ؛ فهي لا تزودنا بجميع الحلول الممكنة لمعادلات كثيرة الحدود. مثال ذلك المعادلة $x^2+1=0$ لا يمكن أن تُحل باستخدام الأعداد الحقيقية لأن مربع أي عدد حقيقي عدد غير سالب.

وللتغلب على هذا النقص نعرّف مجموعة الأعداد المركبة **C** على أنها مجموعة كل الأزواج المرتبة :

$$z=(x,y)$$

من الأعداد الحقيقية x وy حيث تحقق هذه الأزواج عمليتي الجمع والضرب التاليتين :

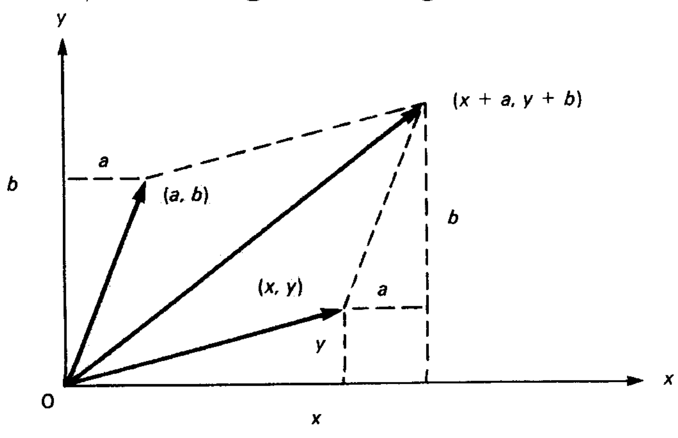
$$(x,y)+(a,b)=(x+a,y+b)$$

$$(x,y).(a,b)=(xa-yb,xb-ya)$$

ويمكن تمثيل العدد المركب الذي على الشكل (x,y) بنقطة في المستوى الديكارتي إحداثياها x,y هما مركبتا العدد المركب $z=(x,y)$. على كل حال، يمكن لتحقيق أكثر من فائدة، أن نقابل بين z وبين المتجه (قطعة مستقيمة موجهة) الذي مبدؤه نقطة الأصل ونهايته النقطة (x,y). وباستخدام هذا التمثيل لكل عدد مركب نرى أن مجموع عددين مركبين :

$$(x,y)+(a,b)=(x+a,y+b)$$

يقابل قانون متوازي الأضلاع لجمع متجهين الموضح في الشكل رقم (١,٢).



الشكل رقم (٢ ,١). قانون متوازي الأضلاع لجمع المتجهات.

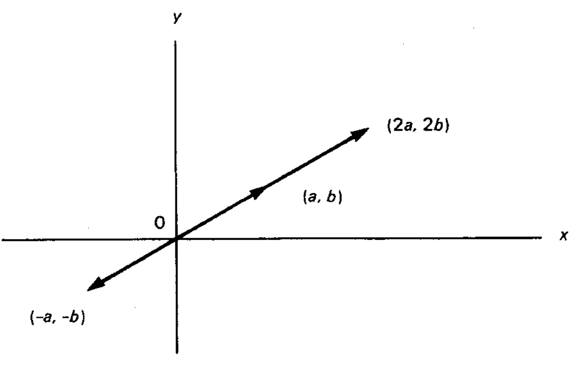
يمكن استخدام المتجهات للتعبير عن ضرب عددين مركبين:

$$(x, y).(a, b) = (xa - yb, xb + ya)$$

لاحظ أن:

$$(x,0)(a,b) = (xa, xb)$$

وعليه فإن المتجه $(a\ ,\ b)$ يطول ويقصر تبعا لقيمة x إذا كان $0 < x$ وإذا كان $x < 0$ فإنه ينعكس بالنسبة لنقطة الأصل (انظر الشكل ١,٣).

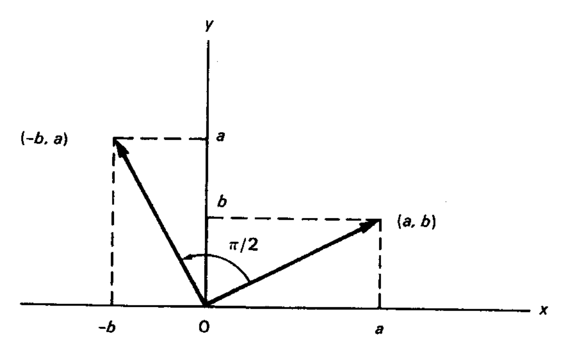


الشكل رقم (٣ ,١). إطالة متجه وانعكاسه.

نلاحظ أيضا أن:

$$(0,1)(a,b) = (-b,a)$$

وباستخدام تشابه المثلثات، نرى أن ضرب أي عدد مركب في العدد (0,1) يدير المتّجه المرافق له باتجاه عكس حركة عقارب الساعة بزاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$ رادين (انظر الشكل رقم ١,٤).



الشكل رقم (١, ٤). دوران متجه $(0, 1)(a, b) = (-b, a)$.

وبما أن: $(x,y) = (x,0) + (0,1)(y,0)$ فإنه يمكن كتابة ضرب (x,y) بالعدد (a,b) على النحو التالي:

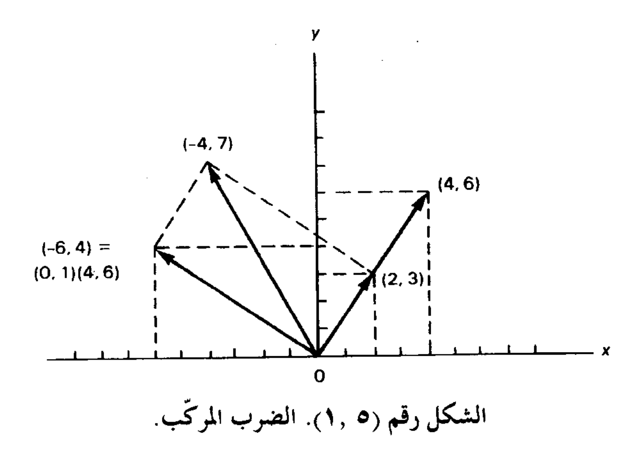
$$\begin{aligned}(x, y)(a, b) &= [(x, 0) + (0, 1)(y, 0)](a, b)\\ &= (x, 0)(a, b) + (0, 1)(y, 0)(a, b)\\ &= (xa, xb) + (0, 1)(ya, yb)\end{aligned}$$

فالضرب المركّب يحتوي على مجموع تكبيرين للعدد (a,b) مع العلم بأن التكبير الثاني دار بزاوية $\frac{\pi}{2}$.

فعلى سبيل المثال، الضرب:

$$\begin{aligned}(1,2)(2,3) &= (2,3) + (0,1)(4,6)\\ &= (2,3) + (-6,4)\\ &= (-4,7)\end{aligned}$$

كما هو موضح في الشكل رقم (١,٥).



الشكل رقم (٥ ,١). الضرب المركّب.

إذا عـبّرنا عـن $(x,0)$ بـالعدد الحقيقـي x فسـوف نلاحـظ أن عمليـتي الجمـع والضرب لهذا الزوج تحققان العمليات الاعتيادية للجمع والضرب للأعداد الحقيقية :

$$(x,0) + (a,0) = (x + a,0)$$
$$(x,0)\,(a,0) = (xa,0)$$

وعليه، فإن مجموعة الأعداد المركبة تحتوي علـى الأعـداد الحقيقيـة كمجموعـة جزئيـة منها، حيث إن :

$$(x,y) = (x,0) + (0,1)\,(y,0)$$

فإذا مثلنـا $(x,0)$ بالعـدد x ورمـزنا للمقـدار $(0,1)$ بالرمـز i، فبإمكـاننا إعـادة كتابـة $z = (x, y)$ على الشكل :

$$z = x + iy$$

وهـذه هـي الصـورة القياسـية للأعـداد المركبـة. الرمز i يسـمى وحـدة التخيـل* ويحقـق الخاصية :

$$i.i = (0, 1)\,(0, 1) = (-1, 0)$$

أو $i^2 = -1$

* ترمز الكتب الهندسية لوحدة التخيل عادة بالرمز j.

يرمز لنقطة الأصل في نظام الإحداثيات بالعدد المركب 0. ويسمى نموذج مستوى الإحداثيات الديكارتية للأعداد المركّبة بالمستوى المركّب.

عندما نذكر العدد المركب $z = x + iy$، فإننا نسمي العدد x بالجزء الحقيقي للعدد z، ويرمز له بالرمز $\text{Re}\, z$. والعدد y بالجزء التخيلي للعدد z ويرمز $\text{Im}\ z$. إذا كان $x = 0$ فإن $z = iy$ وعند ذلك يكون z تخيليا بحتا.

مثال (١, ١, ١)

أوجد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد $z = 2 + 3i$

الحل

لدينا $Re\ z = 2$ و $Im\ z = 3$

يسمح لنا استخدام الرمز $z = x + iy$ للأعداد المركبة أن نجمع المقادير المركبة ونضربها بالطريقة نفسها التي استخدمناها عند جمع كثيرات الحدود وضربها مع ملاحظة أن $i^2 = -1$ فعلى سبيل المثال :

$$(1 + 2i) + (2 + 3i) = 3 + 5i$$
$$(1 + 2i)(2 + 3i) = 2 + (4i + 3i) + 6i^2$$
$$= -4+7i$$

من السهل التحقق من أن عمليتي الجمع والضرب للأعداد المركبة تحققان خواص التبادل، التجميع والتوزيع.

العددان 0 و 1 هما عنصرا الوحدة لعمليتي الجمع والضرب للأعداد المركبة.

يمكن أن نطرح الأعداد المركّبة بملاحظة أن :

$$z - z' = z + (-z') = z + (-1)\, z'$$

مثال ذلك :

$$(7+2i) - (3-4i) = (7+2i) + (-3+4i)$$
$$= 4 + 6i$$

إذن $-z$ هو المعكوس الجمعي للعدد z.

للتحقق من أن الأعداد المركبة تكوّن حقلا (انظر إلى التمرين رقم ٣٣) يجب أن نثبت وجود معكوس ضربي لأي عدد: $a + ib \neq 0$.

إذا ضربنا $a + ib$ بمرافقة $a - ib$ نجد :

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + (abi - abi) - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

ومنه يكون المعكوس الضربي للعدد $a + bi$ مساويا :

$$(a + bi)^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

قسمة عددين مركبين ننجزها بضرب البسط بالمعكوس الضربي للمقام. فعلى سبيل المثال، إذا أردنا قسمة $x + iy$ على $a + bi \neq 0$ نكتب:

$$\frac{x + yi}{a + bi} = (x + yi)\left(\frac{a - bi}{a^2 + b^2}\right) = \left(\frac{ax + by}{a^2 + b^2}\right) + \left(\frac{ay - bx}{a^2 + b^2}\right)i$$

ويمكن إجراء عملية القسمة بطريقة بديلة بضرب البسط والمقاوم (المقسوم، والمقسوم عليه)، بالمرافق المركب للمقام:

$$\frac{x + yi}{a + bi} = \frac{x + yi}{a + bi}\frac{a - bi}{a - bi} = \left(\frac{ax + by}{a^2 + b^2}\right) + \left(\frac{ay - bx}{a^2 + b^2}\right)i$$

مثال (٢, ١, ١)

اكتب الكسر $\frac{1 - 2i}{3 - 4i}$ على شكل عدد مركب؟

الحل

بضرب البسط والمقام بمرافق المقام نجد:

$$\frac{1-2i}{3-4i}=\frac{(1-2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3-6i+4i-8i^2}{9+12i-12i-16i^2}$$
$$=\frac{11}{25}-\frac{2}{25}i$$

لنرمز للمرافق المركب للعدد المركب z بالرمز $\bar{z}$

لاحظ أنه إذا كان $z = x + iy$

فإن :

$$z+\bar{z}=(x+yi)+(x-yi)$$
$$=2x=2\operatorname{Re} z$$

$$z-\bar{z}=(x+yi)-(x-yi)$$
$$=2yi=2i\operatorname{Im} z$$

أيضا

$$z\bar{z}=(x+yi)(x-yi)$$
$$=x^2+y^2$$

من ذلك نحصل على المتساويتين :

$$\operatorname{Re} z=\frac{z+\bar{z}}{2}$$
$$\operatorname{Im} z=\frac{z-\bar{z}}{2}$$

تخبرنا نظرية فيثاغورث أن :

$z\bar{z}$ = مربع (طول z)

مثال (١, ١, ٣)

أوجد طول المتّجه $z = 5 + 7i$ ؟

الحل

بضرب z بالعدد $\bar{z}$ نجد:

$$z\bar{z} = \text{مربع (طول } z)$$
$$= (5 + 7i)(5 - 7i)$$
$$= 25 + 49$$
$$= 74$$

$\therefore$ طول z هو $\sqrt{74}$

إذا كان $z_2 = x_2 + iy_2$ و $z_1 = x_1 + iy_1$ فإن:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$$
$$= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

نستنتج من ذلك أن المرافق المركب لمجموع عدة أعداد مركبة هو المجموع لمرافقات هذه الأعداد:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

وبالمثل (انظر التمارين من ٢٧ – ٢٩) يمكن إثبات أن:

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$
$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$
$$\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$$

تمارين (١ , ١)

في التمارين من (١إلى١٢) أوجد المجموع، الفرق، الضرب والقسمة لكل عددين مركبين فيما يلي:

(١) $i, 2$ (٢) $i, -i$

(٣) $1+i, i$ (٤) $2-i, 3+i$

(٥) $1+i,\ 1-i$ (٦)* $2+i,\ 3-4i$

(٧) $5,\ 2+i$ (٨) $5i,\ 2+i$

(٩) $3-2i,\ 4+i$ (١٠) $2+i,\ 2-i$

(١١) $4+5i,\ 1-i$ (١٢) $2+i,\ 2i$

في التمارين من (١٣) إلى(٢٠) اكتب الأعداد المعطاة على الشكل $x + iy$:

(١٣) $(1-i)^2$ (١٤) $(1-i)^3$

(١٥) $(1-2i)^2$ (١٦) $i^2(1+i)^3$

(١٧) $\dfrac{2+i}{3-i}-\dfrac{4+i}{1+2i}$ (١٨) $\dfrac{3+2i}{1+i}+\dfrac{5-2i}{-1+i}$

(١٩) $(1+i)(1+2i)(1+3i)$ (٢٠) $(1-i)(1-2i)(1-3i)$

(٢١) أثبت أن $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}\, z$

(٢٢) أثبت أن $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(iz)$

(٢٣) أثبت أنه إذا كان $z_1z_2 = 0$ فإن $z_1 = 0$ أو $z_2 = 0$

(٢٤) أثبت أنه إذا كان $\mathrm{Im}\, z = 0$ فإن $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) < 0$.

*(٢٥) لنفرض أن $z_1 + z_2$ وz_1z_2 أعدادا حقيقية سالبة ، فأثبت أن كلا من $z_1,\ z_2$ عدد حقيقي.

*(٢٦) أثبت نظرية ذات الحدين للأعداد المركبة :

$$(z_1 + z_2)^n = z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \binom{n}{2} z_1^{n-2} z_2^2 + \ldots + z_2^n$$

حيث n عدد طبيعي موجب.

و $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (استخدم الاستقراء الرياضي)

---

* ترمز إلى التمارين الأكثر صعوبة.

في التمارين من (٢٧) إلى (٢٩) لنفترض أن : $z_2 = x_2 + iy_2$ و $z_1 = x_1 + iy_1$

(٢٧) أثبت أن $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(٢٨) أثبت أن $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

(٢٩) أثبت أن $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$ حيث $z_2 \neq 0$.

لقد ضمن Cirolamo Cardano في كتابه Ars Magana طريقة لإيجاد جذور المعادلة التكعيبية :

$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0$$

التي اكتشفها Niccolo Tartaglia.

*(٣٠) أثبت أن الفرضية $\omega = z + p/3$ تختزل المعادلة التكعيبية في الحالة العامة إلى معادلة على الشكل $\omega^3 + a\omega + b = 0$.

*(٣١) أثبت أن جذور المعادلة في التمرين (٣٠) هي :

$$\omega = A + B ، -\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\sqrt{3}i ، -\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\sqrt{3}i$$

حيث :

$$A = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + D} ، B = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - D} ، D = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$$

*(٣٢) أثبت أن الأعداد المركبة تستخدم حتى في إيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة :

$$\omega^3 - 19\,\omega + 30 = 0$$

وذلك باستخدام طريقة تارتاجليس (Tartaglia's) .

(٣٣) أثبت أن الأعداد التخيلية تحقق مسلمات الحقل.

(٣٤) أثبت أن عنصر الوحدة للجمع إلى C وحيد.

(٣٥) أثبت عنصر الوحدة للضرب إلى C وحيد.

(٢ ,١) التمثيل القطبي

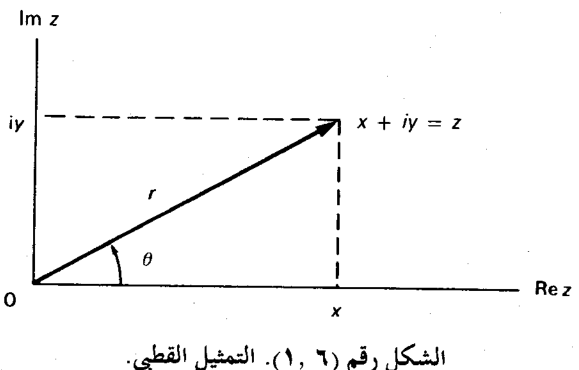
Polar Representation

وجدنا أن الأعداد المركبة يمكن أن تمثل بمتجهات في المستوى المركب. وفي هذا الجزء سوف نستخدم فكرة قطعة الخط المستقيم الموجهة لحساب خواص الطول، وزاوية ميل المتجه في المستوى المركب.

لندرس المتجه غير الصفري:

$$z = x + iy$$

كما هو موضح في الشكل رقم (١,٦).



الشكل رقم (٦ ,١). التمثيل القطبي.

نستطيع حساب طول المتجه z باستخدام نظرية فيثاغورث:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

نسمي هذا الطول بمقياس العدد المركب z، ويرمز له بالرمز:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

لاحظ أن:

$$|\bar{z}| = |z| \text{ و } |z| \geq \operatorname{Im} z \text{ ، } |z| \geq \operatorname{Re} z$$

أكثر من هذا نذكر أننا في الجزء (١ ,١) قد أثبتنا أن $\bar{z}z = x^2 + y^2$ إذن $\bar{z}z = |z|^2$

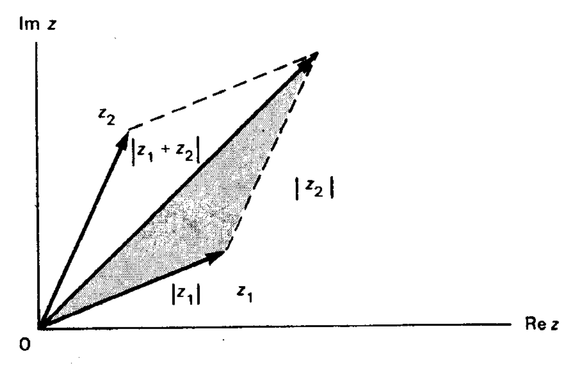
التفسير للجمع المركب كجمع متجهي مفيد جدا في إثبات النتيجة المهمة التالية.

المتباينة (المتراجحة) المثلثية The triangle inequality

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$

البرهان

تذكر أن طول أحد أضلاع مثلث أقل من مجموع طولي الضلعين الآخرين، وبالتالي فإن المتراجحة المثلثية تنتج مباشرة من المثلث المظلل في الشكل رقم (١,٧). وإن المتراجحة المثلثية ممكن أن تثبت جبريا أيضا (انظر التمرين رقم ٣٨). ■



الشكل رقم (١, ٧). المتباينة المثلثية $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

بالرجوع إلى الشكل رقم (١,٦)، نرى أن الزاوية التي يصنعها المتجه $z = x + iy$ مع المحور الحقيقي تعطي بالصيغة:

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

سوف تكون هذه الصيغة، على كل حال، غير صالحة في الربع الثاني أو الثالث حيث إن القيم لدالة الظل العكسية (arctan) تقع في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. وأكثر من هذا، فإن زاوية الميل للمتجه تحدد بوجه عام بإضافة مضاعفات 2π. وبما أن الزوايا:

$$\theta + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

تعطي جميعها نفس الاتجاه في المستوى المركب، فإن زاوية الميل للمتجه z تحدد هنا بحذف مضاعفات 2π، وعندئذ تسمى زاوية الميل بالزاوية الأساسية للعدد z، ويرمز لها بالرمز $\arg z$. وقيمة $\arg z$ التي تحقق:

$$-\pi \leq \arg z < \pi$$

تسمى القيمة الأساسية للإزاحة الزاويّة (argument)، ويرمز لها بالرمز $\operatorname{Arg} z$. وعندما نتعامل مع الـ argument، من المتعارف عليه أن نستخدم الرمز $\arg z$ مع إغفال مضاعفات 2π.

ونستخدم العبارة: $\operatorname{Arg} z + 2\pi k$، حيث k عدد صحيح ثابت، للدلالة على زاوية معينة.

وبالرجوع إلى المتجه الأصلي $z \neq 0, z = x + iy$ نلاحظ أن:

$$x = r \cos\theta = |z| \cos (\arg z)$$
$$y = r \sin \theta = |z| \sin (\arg z)$$

وبالتالي:

$$z = x + iy = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

بالإمكان إعادة كتابتها على الشكل

$$z = |z| [\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)], z \neq 0$$

ويسمى هذا التمثيل القطبي للعدد المركب* z.

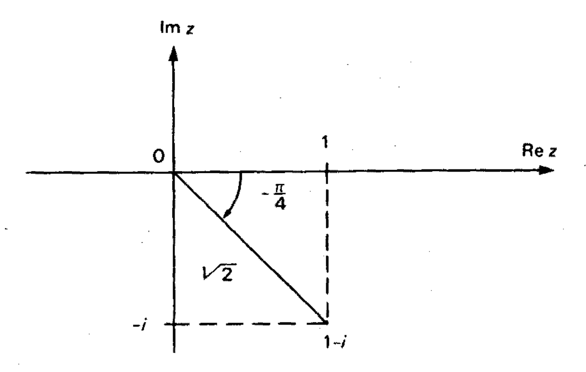
مثال (١, ٢, ١)

أوجد التمثيل القطبي للعدد $1-i$.

الحل

لاحظ الشكل رقم (١,٨).

* تستخدم كتب الهندسة غالبا الرمزين $rL^*\theta$ و$r\, cis\theta$ للتعبير القطبي عن z.



الشكل رقم (٨ ,١). التمثيل القطبي للعدد $1 - i$.

مقياس العدد $1\text{-}i$ هو :

$$|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

بينما الزاوية الأساسية للعدد $1\text{-}i$ هي :

$$\text{Arg}\,(1 - i) = \frac{-\pi}{4}$$

والزوايا القطبية غير وحيدة التحديد، إذن زاوية الميل هي :

$$\arg\,(1 - i) = \frac{-\pi}{4} + 2\pi k,$$

حيث k أي عدد صحيح، وبالتالي فإن التمثيل القطبي للعدد $1 - i$ هو :

$$1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi k\right)\right].$$

ضرب عددين مركبين w, z له تفسير هندسي مشوّق عندما نكتب كلا من العددين بشكله القطبي. لنفترض أن $\theta = \arg z$ و $\phi = \arg w$ بكتابة z و w في التمثيل القطبي :

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$w = |w|\,(\cos\phi + i\sin\phi)$$

فإن :

$$\begin{aligned} z\,w &= |z|\,|w|\,(\cos\theta + i\sin\theta)\,(\cos\phi + i\sin\phi) \\ &= |z|\,|w|\,[(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi)] \end{aligned}$$

وبإضافة العلاقة المثلثية :

$$z\, w = |z|\, |w|\, [\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)] \quad (1)$$

وبما أن :

$$|\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)| = 1.$$

فإننا نجد من المعادلة (1) أن :

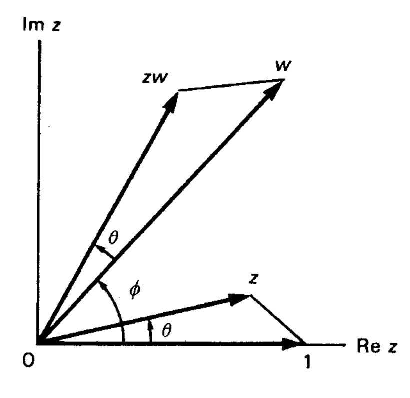
$$|zw| = |z||w| \quad (2)$$

$$\arg zw = \arg z + \arg w. \quad (3)$$

وبالتالي ، فإن طول المتجه zw هو ناتج ضرب كل من طول المتجـه z في طـول المتجـه w . كما أن الزاوية القطبية للمتجه zw هي مجموع الزاويتين القطبيتين لكل من z وw.

وبما أن الزاوية القطبية تحسب دون إغفال مضاعفات 2π ، فإن المعادلة (3) تقدم لنا تفسيرا فحواه : إذا أعطينا قيما معينة لأي من الحدود في (3) فإنه توجد قيمة للحد الثالث تكون فيه المساواة صحيحة في (3).

يوضح الشكل رقم (١,٩) البناء الهندسي للضرب zw. لاحظ أن الزاوية بين w وzw يجب أن تكون مساوية للزاوية بين 1 وz في الشكل رقم (١,٩)، وعليه فإن المثلثين z 1 0 وzw w 0 يتشابهان.



الشكل رقم (١,٩). الضرب المركب.

يوصلنا قسمة عددين مركبين إلى المعادلة التالية :

$$\frac{z}{w}=\frac{z\overline{w}}{w\overline{w}}=\frac{|z|(\cos\theta+i\sin\theta)|\overline{w}|(\cos\phi-i\sin\phi)}{|w|^2}; \quad w\neq 0.$$

حيث $|\overline{w}|=|w|$ ، وبوساطة صيغ الجمع المثلثية نحصل على :

$$\frac{z}{w}=\frac{|z|}{|w|}[\cos(\theta-\phi)+i\sin(\theta-\phi)].$$

ومنه :

$$\frac{z}{w}=\frac{|z|}{|w|} \qquad (4)$$

و

$$\arg(z/w)=\arg z-\arg w, \qquad (5)$$

[المعادلة (5) تخضع لنفس التفسير المذكور للمعادلة (3)].

الضرب :

$$zw=|z||w|[\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)].$$

حيث تؤدي $\theta=\arg z$ و $\phi=\arg w$ إلى نتيجة شيقة عندما تكون $z=w$. فعندما $\theta=\phi$ فإن :

$$z^2=|z|^2[\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)].$$

بوضع $w=z^2$ نجد أن :

$$z(z^2)=|z||z|^2[\cos(\theta+2\theta)+i\sin(\theta+2\theta)].$$

أو

$$z^3=|z|^3[\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)].$$

حيث إن :

$$z=|z|\ (\cos\theta+i\sin\theta)$$

فقد أثبتنا أن :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

وأن :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$$

وبالاستمرار بهذه الطريقة ، نحصل على نظرية دوموافر (De Mover's theorem) التي سميت على شرف الرياضي الفرنسي أبراهام دوموافر (١٦٦٧-١٧٥٤م) :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

حيث إن n عدد طبيعي موجب. ولنظرية دوموافر عدة تطبيقات مفيدة.

مثال (٢, ٢, ١)

احسب $(1 - i)^{23}$

الحل

يمكن أن نضرب $(1\text{-}i)$ في نفسه 23 مرة للحصول على الجواب ، ولكن باستخدام نظرية دوموافر ، نحصل على الجواب بطريقة أسهل. رأينا في مثال (١,٢,١) أن :

$$1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi k\right)\right]$$

باستخدام القيمة الأساسية للزاوية نحصل على المساواة :

$$(1 - i) = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right].$$

ومن نظرية دوموافر نحصل على :

$$(1 - i)^{23} = (\sqrt{2})^{23}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]^{23}.$$

$$= 2^{23/2}\left[\cos\left(\frac{-23\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-23\pi}{4}\right)\right].$$

وبما أن:

$$\frac{-23\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 6\pi$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

عندئذ سوف نحصل على:

$$(1-i)^{23} = 2^{\frac{23}{2}}\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} = 2048(1+i).$$

ويمكن استخدام نظرية دوموافر لإيجاد جذور العدد المركب. إذا كان z الجذر النوني للعدد المركب w، فإن $z^n = w$

لإيجاد z، نضع:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

$$w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi),$$

حيث:

$$\arg z = \theta$$

$$\arg w = \phi$$

من نظرية دوموافر نحصل على:

$$|z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = |w|(\cos\phi + i\sin n\phi).$$

ويمكن أخذ

$$|z| = |w|^{\frac{1}{n}}$$

و

$$\theta = \frac{1}{n}\arg w = \frac{1}{n}(\text{Arg } w + 2\pi k), \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{6}$$

بالرغم من أن المعادلة (6) تعطي عددا لا محدودا من قيم θ ، فإننا نحصل فقط على n من الزوايا القطبية المختلفة والسبب كون :

$$\frac{2\pi(k+n)}{n} = \frac{2\pi k}{n} + 2\pi$$

وعليه فإن الزاوية القطبية تعيد نفسها بعد كل n عددا طبيعيا ، ومنه نجد أن :

$$\theta = \frac{1}{n}(Argw + 2\pi k), k = 0, 1, \ldots, n\text{-}1.$$

مثال (٣, ٢, ١)

أوجد الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد $w = 1 - i$.

الحل

لنفرض أن z هو الجذر التكعيبي للعدد i - 1 إذن :

$$z^3 = 1 - i$$

وبوساطة نظرية دوموافر

$$|z|^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi k\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi k\right)\right].$$

وبالتالي فإن :

$$|z| = 2^{\frac{1}{6}} \text{ و } \theta = \frac{-\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0,1,2.$$

إذن الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد i- 1 هي :

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right]$$

$$= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

تعطي القطوع المخروطية أمثلة إضافية لمفاهيم في هذا الجزء. وبالرغم من أن الصيغ العادية للهندسة التحليلية يمكن استخدامها (مع $x = \operatorname{Re} z$ و $y = \operatorname{Im} z$) إلا أنه من السهل تعريف القطوع المخروطية بدلالة المسافة.

مثال (٤, ٢, ١)

يعرف القطع الناقص على أنه مجموعة نقاط المستوى الإحداثي التي يكون مجموع بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين في هذا المستوى يساوي مقدارا ثابتا. وتسمى النقطتان F و F' بؤرتي القطع الناقص. ما معادلة القطع الناقص الذي يمر بالنقطة i الذي بؤرتاه ± 1 ؟

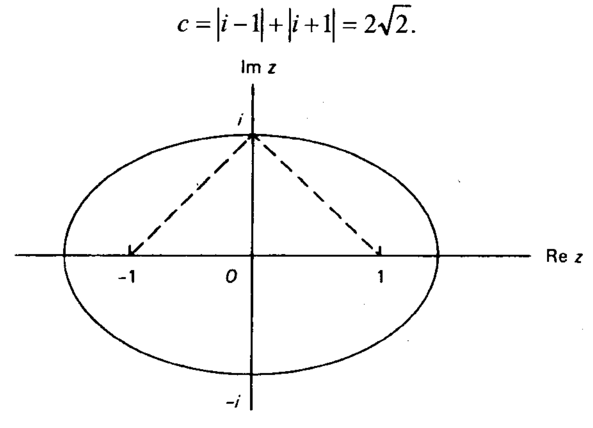
الحل

بما أن $z - z_0$ المتجه من z_0 إلى z، فنجد من تعريف القطع الناقص:

$$|z-1|+|z+1|=c$$

حيث c عدد حقيقي ثابت، لكن $z = i$ تحقق هذه المعادلة، بالتالي نجد أن، (انظر الشكل ١٠, ١):

$$c=|i-1|+|i+1|=2\sqrt{2}.$$



الشكل رقم (١٠, ١). قطع ناقص $|z-1|+|z+1| = 2\sqrt{2}$

إذن القطع الناقص يعطى بالمعادلة :

$$|z-1|+|z+1|=2\sqrt{2}.$$

مثال (٥, ٢, ١)

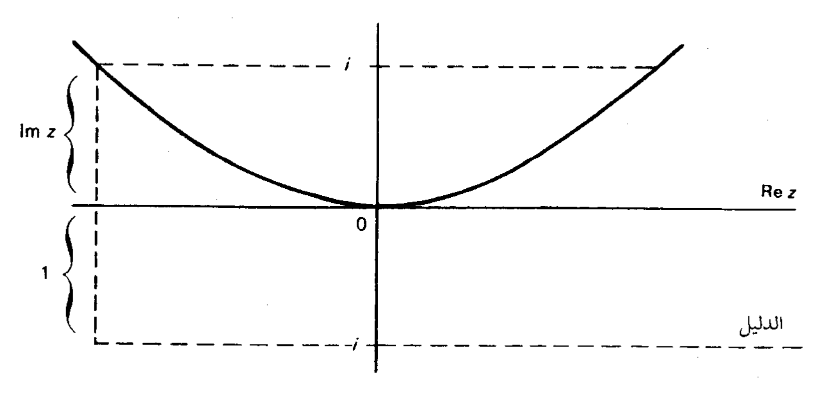
يعرّف القطع المكافئ على أنه مجموعة النقاط من المستوى التي يكون بعدها عن نقطة ثابتة F يساوي بعدها عن مستقيم ثابت ما. (تسمى النقطة F بؤرة القطع ويسمى المستقيم L دليله). أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته i ودليله المستقيم $\text{Im } z = -1$.

الحل

من التعريف نحصل على :

$$|z-i| = \text{Im } z + 1,$$

حيث تقع أقرب نقطة على الدليل من z عموديا أسفل z، انظر الشكل رقم (١١, ١).



الشكل رقم (١١, ١). القطع المكافئ |z - i| = Im z + 1

وإذا أردنا الحصول على العلاقة المقابلة من الهندسة التحليلية ، نربع الطرفين للمساواة السابقة فنحصل على :

$$|z|^2 + 1 + 2\text{Re } zi = (\text{Im } z + 1)^2$$

أو

$$|z|^2 - 2\text{Im}\, z = (\text{Im}\, z)^2 + 2\text{Im}\, z.$$

بوضع $y = \text{Im}\, z$ و $|z|^2 = x^2 + y^2$ نحصل على :

$$y = x^2/4$$

مثال (١, ٢, ٦)

القطع الزائد هو مجموعة نقاط المستوى الإحداثي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين F و F' الواقعتين في هذا المستوى تساوي مقدارا ثابتا (تسمى النقطتين F و F' بؤرتي القطع الزائد). ما معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه ± 1 ويمر بالنقطة $1+i$ ؟

الحـــل

حسب التعريف فإن :

$$|z-i|-|z+i| = c,$$

حيث c عدد حقيقي ثابت ، وبما أن النقطة $z = 1+i$ تحقق هذه المعادلة فإن $c = \sqrt{5} - 1$.

تمارين (١, ٢)

في التمارين من (١) إلى (٩) أوجد المقياس ، والزاوية ، ثم التمثيل القطبي للأعداد المركبة المعطاة :

(١) i (٢) $-i$ (٣) $1+i$

(٤) $-3+4i$ (٥) $4+3i$ (٦) $5-12i$

(٧) $2+7i$ (٨) $2-i$ (٩) $5+2i$

في التمارين من (١٠) إلى (١٥) استخدم نظرية دوموافر لكتابة كل عدد على الصيغة $x+iy$ حيث x و y أعداد حقيقية :

(١٠) $(1+i)^{29}$ (١١) $(-1+i)^{17}$

(١٢) $(-1-i)^{36}$ (١٣) $(2+2i)^{12}$

(١٤) $(\sqrt{3}+i)^{15}$ (١٥) $(-\sqrt{3}+i)^{13}$

أوجد جميع الحلول لكل من المعادلات التالية في التمارين من (١٦) إلى (٢٣):

(١٦) $z^2=i$ (١٧) $z^2=1+i$

(١٨) $z^2=2-i$ (١٩) $-z^2=\sqrt{3}+i$

(٢٠) $z^3=2+i$ (٢١) $z^3=1+\sqrt{3}\,i$

(٢٢) $z^4=i$ (٢٣) $z^4=-1$

(٢٤) أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $\pm i$ ويمر بالنقطة $1+i$. ما الصيغة المناظرة في الهندسة التحليلية؟

(٢٥) أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه 1 و i ويمر بنقطة الأصل ما الصيغة المناظرة في الهندسة التحليلية؟

(٢٦) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $1+i$ ودليله المستقيم $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z=0$.

(٢٧) أكتب المعادلة العامة في الصورة المركبة للقطع الزائد الذي بؤرتاه a و b.

(٢٨) أثبت أن:

$$|z|\le|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|\le\sqrt{2}|z|.$$

(٢٩) أثبت أنه إذا كان: $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ و $z_1+z_2+z_3=0$ ، فإن z_1,z_2,z_3 هي رؤوس مثلث متطابق الأضلاع.

(**إرشاد:** أثبت أن $|z_1-z_2|^2=|z_2-z_3|^2=|z_3-z_1|^2$)

*(٣٠) *أثبت أن المثلث الذي رؤوسه z_1,z_2,z_3 يكون متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا:

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$$

(٣١) أثبت أن :

$$|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$$

(٣٢) أثبت أن :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

(٣٣) أثبت أن :

$$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re} z_1\bar{z}_2$$

(٣٤) أثبت أن :

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

(٣٥) أثبت أن :

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1$$

إذا كان $|z| < 1$ و $|a| < 1$.

(٣٦) أثبت أن المتباينة المثلثية تصبح مساواة مع العددين غير الصفريين z_1 و z_2 إذا وفقط إذا $\arg z_1 = \arg z_2$.

(٣٧) أثبت أنه إذا كان z_0 جذر لكثيرة حدود $P(z)$ معاملاتها حقيقية ، فإن $\bar{z}_0$ هو أيضا جذرا لـ $P(z)$.

(٣٨) فك $|z_1 + z_2|^2$ لإثبات المتراجحة المثلثية.

(**إرشاد:** $\operatorname{Re} z_1\bar{z}_2 \leq |z_1\bar{z}_2| = |z_1||\bar{z}_2|$.)

(٣٩) الجذور n للمعادلة : $z^n = 1$ تسمى الجذور النونية للوحدة. أثبت أن الجذور النونية للوحدة تعطى بالصيغة :

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \quad , \quad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

(٤٠) لنفرض أن z_k أي جذر نوني للوحدة أثبت أن:

$$1+z_k+z_k^2+\dots+z_k^{n-1}=0 \quad \text{إذا كان} \quad z_k\neq 1$$

(٤١) إذا كانت $1, z_1, z_2 \dots, z_{n-1}$ هي الجذور النونية للوحدة.

أثبت أن:

$$(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{n-1})=1+z+z^2+\dots+z^{n-1}.$$

(٤٢)* أوجد جميع الأوقات الممكنة التي يمكن أن تنتج من تبديل موضعي عقربي الساعات والدقائق للحصول على وضع يحدث فعلا في ساعة عادية.

(٤٣)* بتصغير المقدار $\sum_{k=1}^{n}(|a_k|-\lambda|z_k|)^2$ حيث:

$a_1,\dots,a_n, z_1,\dots,z_n$ أعداد مركبة و λ عدد حقيقي اختياري، أثبت أن:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k z_k|\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)$$

(٤٤)* أثبت مساواة لاجرانج (Lagrange)

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k z_k\right|^2=\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)-\sum_{1\le j<k\le n}\left|a_j\bar{z}_k-a_k\bar{z}_j\right|^2.$$

(٤٥)* نظرية إنستروم - كاكيا (Enestrom-Kakeya)

لنفرض أن $P(z)$ كثيرة حدود معاملاتها حقيقية:

$$P(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1 z+a_0,$$

تحقق $a_0>a_1>\dots>a_n>0$

أثبت أن جميع جذور $P(z)$ تحقق $|z|>1$.

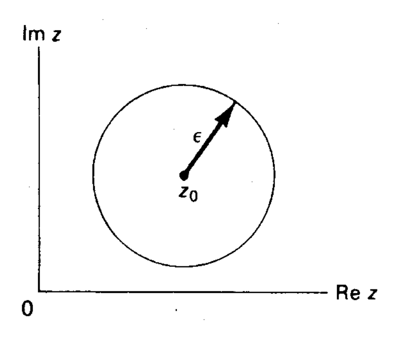
(**إرشاد**: طبق المتراجحة (المتباينة) المثلثية على:

$$(1-z)P(z)=a_0-\left[(a_0-a_1)z+(a_1-a_2)z^2+\dots+(a_{n-1}-a_n)z^n+a_n z^{n+1}\right]$$

(٣ ,١) المجموعات في المستوى المركب

Sets in the Complex Plane

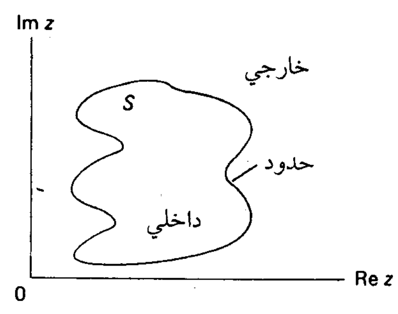
لنفرض أن z_0 عدد مركب يعرف الجوار - ε إلى z_0 على أنه مجموعة النقاط z التي بعد كل منها عن z_0 أقل من ε ؛ أي جميع النقاط z التي تحقق : $|z - z_0| < \varepsilon$ (انظر الشكل رقم ١,١٢). في الشكل، جوار ε إلى z_0 هو مجموعة النقاط داخل القرص الذي مركزه z_0 ونصف قطره ε.



الشكل رقم (١٢ ,١). الجوار ε للنقطة z_0.

لنفرض أن S مجموعة النقاط في المستوى المركب **C**. تسمى النقطة z_0 نقطة داخلية من S إذا وجد جوار ε إلى z_0 يكون بكامله داخل S. مجموعة النقاط الداخلية إلى S، يرمز لها بالرمز Int S. المكملة إلى S هي المجموعة $(\mathbf{C} - S)$ لجميع النقاط غير الموجودة في S. المجموعة Int $(\mathbf{C} - S)$ تسمى خارج S.

النقطة z_0 نقطة حدود إلى S إذا كان كل جوار ε إلى z_0 يحتوي على نقاطا من S ونقاطا لا تقع داخل S، من الملاحظ أن كل نقطة حدود إلى S لا تقع داخل S أو خارج S. (مجموعة نقاط الحدود إلى S تسمى حدود S) (انظر الشكل رقم ١,١٣).



الشكل رقم (١٣ ,١). داخل، خارج وحدود مجموعة.

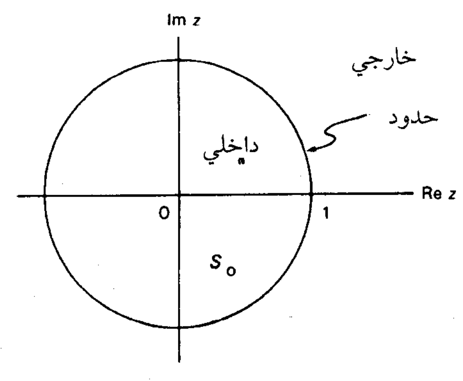
النقطة z_0 تسمى نقطة تجمع للمجموعة S إذا كان كل جوار إلى z_0 يحوي على الأقل نقطة واحدة من S تختلف عن z_0 .

مثال

لنفرض أن S_0 مجموعة النقاط z حيث $|z|<1$. أوجد داخل المجموعة S_0 وخارجها وحدودها؟

الحل

لنفرض أن z_0 أي نقطة من S_0 . لاحظ أن القرص $|z-z_0|<\varepsilon$ يقع بكامله داخل S_0 عندما $\varepsilon<1-|z_0|$. إذن كل نقطة من S_0 نقطة داخلية ، وبالمثل كل نقطة z_0 تحقق $|z_0|>1$ هي نقطة خارجية إلى S_0 . إذا كان $|z_0|=1$ ، فإن كل جوار ε إلى z_0 سوف يحوي نقاطاً من S_0 ونقاطاً ليست من S_0 . إذن حدود المجموعة S هي كل النقاط الواقعة على الدائرة $|z|=1$ ، داخل S_0 هي المجموعة $|z|<1$ ، أما خارج S_0 فهي مجموعة النقاط التي تحقق $|z|>1$ (انظر الشكل رقم ١,١٤).

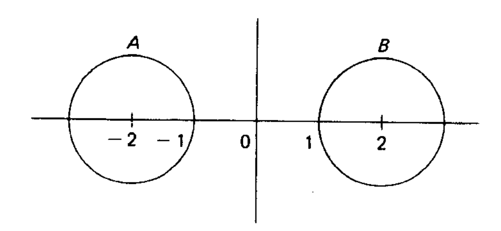


الشكل رقم (١٤ ,١). داخل، حدود وخارج المجموعة $|z| < 1$.

تكون المجموعة مفتوحة إذا كانت كل نقاطها نقاطا داخلية. ويعني هذا أن $S = \text{Int } S$ عندما تكون S مفتوحة. وعليه فالمجموعة S_0 في المثال السابق مجموعة مفتوحة وتسمى مكملة المجموعة المفتوحة مجموعة مغلقة. فعلى سبيل المثال المجموعة T لجميع النقاط $|z| \geq 1$ تكون مغلقة. وبالمثل المجموعة $|z| \leq 1$ تكون مغلقة.

نقول إن المجموعة S محدودة، إذا وجد عدد حقيقي موجب R بحيث تحقق جميع العناصر z في S أي $|z| < R$. وإذا لم يتحقق هذا الشرط نقول إن S مجموعة غير محدودة. وعلى ذلك تكون المجموعة S_0 في المثال السابق محدودة والمجموعة: $T = (z : |z| \geq 1)$ غير محدودة.

تكون المجموعة S مترابطة إذا لم يمكن كتابتها على شكل اتحاد مجموعتين غير خاليتين منفصلتين B, A بشرط ألا تحوي أي منها أي نقطة حدودية من الأخرى. يعني هذا مبدئيا أن S قطعة واحدة، على سبيل المثال S مترابطة، ولكن مجموعة النقاط z حيث: $|z-2| < 1$ أو $|z+2| < 1$ ليست مترابطة. ويمكن أن نرمز بالرمز A لمجموعة النقاط $|z-2| < 1$ وبالرمز B لمجموعة النقط z حيث $|z+2| < 1$ (انظر الشكل رقم ١,١٥). لاحظ أن A و B مجموعتان مفتوحتان ومنفصلتان لأن كل واحدة منهما لا تحتوي على نقاط حدود الأخرى (لماذا)؟.



الشكل رقم (١٥ ,١). $A \cup B$ ليست مترابطة

المنطقة* هي مجموعة مفتوحة ومترابطة. ومن البدهي أن أي نقطتين في المنطقة يمكن وصلهما بمضلع يقع ضمن هذه المنطقة، ولكن هذه الحقيقة تتطلب توضيحا. والإثبات صعب بعض الشيء، ولكن يجب أن نقبلها بدون برهان لأننا سوف نستخدمها مرة ثانية.

نظرية

يمكن وصل أي نقطتين في منطقة بمضلع يقع في المنطقة نفسها.

البرهان**

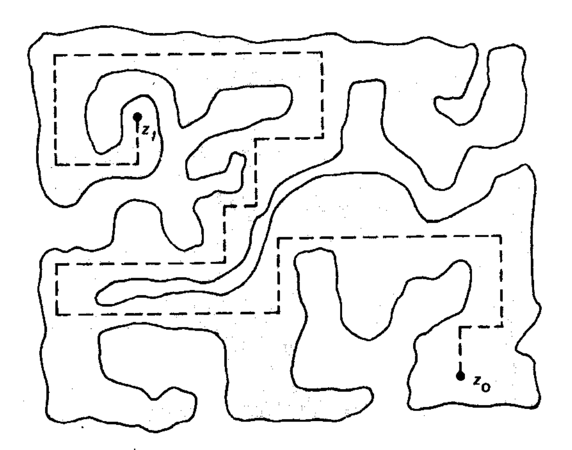
نرمز للمنطقة بالرمز S، نفرض أن z_0 تقع في S، ولنرمز بالرمز S_1 للنقاط التي تقع في S التي يمكن وصلها بالنقطة z_0 باستخدام مضلع، ونرمز S_2 للنقاط التي لا يمكن وصولها بالنقطة z_0. إذا كانت z_1 في S_1 وبالتالي فهي تقع في S؛ إذن هي نقطة داخلية بالنسبة إلى S؛ إذن يوجد ε إلى z_1 يقع في $S:|z-z_1|<\varepsilon$، وتقع جميع نقاط هذا الجوار في S_1 لأنه يمكن وصل كل منها مع z_1 بخط مستقيم موجود داخل S، ومن ثم يمكن وصله إلى z_0 بمضلع يقع في S.

* يسمى كثير من الكتب المجموعة المفتوحة المترابطة بالمجال، ونتجنب هذا الاستخدام لتلافي الإشكال الذي قد يقع عندما نستخدم مجال تعريف الدالة.

** يرمز إلى الإثبات الأكثر صعوبة، أو الإثبات الاختياري.

إذن كل نقطة من S_1 هي نقطة داخلية بالنسبة للمجموعة S_1، وعليه فإن S_1 مفتوحة. وإذا كان z_2 في S_2، نفترض أن $|z-z_2|<\varepsilon$ جوار محتوى في S، وإن أي نقطة في هذا الجوار لا تقع في S_1، فلو كانت كذلك، فإن z_2 تقع في S_1 وعليه تكون كل نقطة من S_2 نقطة داخلية بالنسبة إلى S_2، وبالتالي فإن S_2 تكون مجموعة مفتوحة. وبالتالي لا يمكن لأي مجموعة أن تحتوي على نقاط حدود الأخرى؛ لأن كلا منهما مجموعة مفتوحة، وهما منفصلتان. وبما أن S مجموعة مترابطة، فإن إحدى هذه المجموعات يجب أن تكون خالية. ولكن z_0 في S_1، إذن S_2 مجموعة خالية. وعلى ذلك فإن أي نقطتين يمكن وصلهما إلى z_0 بطريق مضلع في S، ومن ثم إلى كل نقطة أخرى بطريق مضلع عن طريق z_0 وهذا يكمل البرهان.

وأكثر من هذا، يمكن أن يطلب أن تكون الخطوط في المضلع موازية لمحاور الإحداثيات. الإثبات باستخدام هذا الطلب مماثلاً لما سبق حيث يمكن دائماً إيصال مركز القرص المفتوح إلى نقطة من نقاطه باستخدام قطعتين مستقيمتين موازيتين إلى المحورين الإحداثيين على الأكثر (انظر الشكل ١,١٦).



الشكل رقم (١٦ ,١). مضلع يصل بين z_1, z_0.

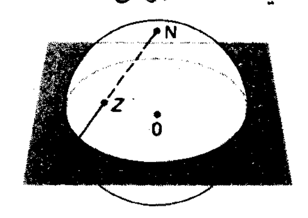
تسمى المنطقة بسيطة الترابط إذا كانت مكملتها مترابطة ، يؤدي هذا إلى ألا يكون في المنطقة بسيطة الترابط ثقوب على سبيل المثال المجموعة S_0 في المثال السابق مجموعة بسيطة الترابط ، ولكن مجموعة النقاط z التي تحقق $0<|z|<1$ ليست بسيطة الترابط ، لأن نقطة الأصل لهذه المجموعة تكون ثقبا .

ومن المفيد لأغراض متعددة أن يوسّع النظام **C** نظام الأعداد المركبة بإدخال نقطة اللانهاية التي يرمز لها بالرمز ∞. وتسمى المجموعة الجديدة بالمستوى المركب الممتد $\boldsymbol{M}$. وتحقق النقطة ∞ العلاقات الجبرية التالية :

$$a+\infty=\infty+a=\infty, \quad \frac{a}{\infty}=0\,, \quad a\neq\infty,$$

$$b\,.\,\infty=\infty\,.\,b=\infty, \ \frac{b}{0}=\infty \ , \quad b\neq\infty,$$

كنموذج هندسي $\boldsymbol{M}$ نستخدم $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ كرة الوحدة في الفراغ الثلاثي ، حيث يقطع الشعاع المنبعث من القطب الشمالي N ، والمار بالنقطة z من المستوى ، الكرة في النقطة الوحيدة z. وبالتالي فإن N تقابل نقطة اللانهاية ∞ (انظر الشكل رقم ١,١٧). ويقابل الجوار ε إلى N على كرة الوحدة جوار النقطة عند اللانهاية ويسمى هذا النموذج كرة ريمان ويسمى هذا التقابل بالإسقاط المجسم البياني Stereographic projection. ومن الممكن إثبات أن جميع الخطوط المستقيمة في **C** تقابل دوائر تمر خلال النقطة ∞ في $\boldsymbol{M}^*$ وسنبرهن هذا الادعاء في الفصل الخامس.



الشكل رقم (١٧ ,١). كرة ريمان.

---

* تعابير أخرى للرمز $\boldsymbol{M}$ هي : Σ, S و $C\cup\{\infty\}$.

تمارين (٣ , ١)

في التمارين من (١) إلى (١٠) حدد نوع المجموعات حسب كونها مفتوحة، مغلقة، محدودة و مترابطة أو بسيطة الترابط:

(١) $|z+3|<2$ (٢) $|\operatorname{Re} z|<1$

(٣) $|\operatorname{Im} z|>1$ (٤) $0<|z-1|\le 1$

(٥) $|z|\le \operatorname{Re} z+2$ (٦) $|z-1|-|z+1|>2$

(٧) $|z+1|+|z+i|>2$ (٨) $|z-1|<\operatorname{Im} z$

(٩) $2\sqrt{2}<|z-1|+|z+1|<3$ (١٠) $\big||z-i|-|z+i|\big|<1$

(١١) ما حدود المجموعات في التمارين من(١) إلى(١٠)؟

في التمارين من (١٢) إلى (١٥) الخواص المذكورة للمجموعات المفتوحة أو المغلقة:

(١٢) تقاطع عدد منته من مجموعات مفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

(١٣) اتحاد عدد منته من مجموعات مغلقة يكون مجموعة مغلقة.

(١٤) تقاطع أي عدد من المجموعات المغلقة يكون مجموعة مغلقة.

(١٥) اتحاد أي عدد من المجموعات المفتوحة يكون مجموعة مفتوحة.

(١٦) أثبت أنه إذا أمكن وصل أي نقطتين في مجموعة مفتوحة بمضلع يقع داخل المجموعة، فإن هذه المجموعة تكون مترابطة.

(١٧) إغلاق (closure) المجموعة S هي تقاطع جميع المجموعات المغلقة التي تحتوي على S. أثبت أن لصاقة المجموعة المترابطة تكون مجموعة مترابطة.

(١٨) أثبت أن S مغلقة إذا وفقط إذا كانت، تحوي جميع نقاط تجمعها.

(١٩) ما هي نقطة تجمع المجموعة التي تحتوي على جميع نقاط $z=\frac{1}{n}$ و n عدد طبيعي موجب (يبين هذا التمرين أن نقطة التجمع لا تقع بالضرورة داخل المجموعة).

(٢٠) لنفرض أن S مجموعة النقاط z التي تحقق $|z|\geq 1$ أو $z=0$. أثبت أن $z=0$ ليست نقطة تجمع لهذه المجموعة.

(٢١) ما هي نقطة التجمع لمجموعة النقاط z التي تحقق $z = -in$ حيث n عدد طبيعي موجب في المستوى الممتد m. وهل لهذه المجموعة نقطة تجمع في **C**.

(٢٢) أثبت أن أي نقطة من المنطقة هي نقطة تجمع لهذه المنطقة.

(٤ ,١) الدوال المتصلة ذات المتغير المركب

Continuous Functions of Complex Variable

تعرف الدوال المركبة ذات المتغير المركب بقاعدة تعطي لكل عدد مركب z من المجموعة S (مجال الدالة f) عددا وحيدا w ونكتب $w=f(z)$، نقول إن w قيمة الدالة f عند النقطة z من مجال التعريف S. لنحلل الدالة المركبة $w = f(z)$ ذات المتغير المركب $z = x + iy$ إلى جزئيها الحقيقي والتخيلي على الشكل:

$$w=u(z)+iv(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

لنلاحظ أن هذه الدالة تحتوي على زوج من الدوال الحقيقية $u(x,y)$ و $v(x,y)$ في متغيرين حقيقيين x,y.

مثال (١, ٤, ١)

أكتب $w=z^2$ على شكل زوج من الدوال الحقيقية ذات المتغيرين الحقيقيين.

الحل

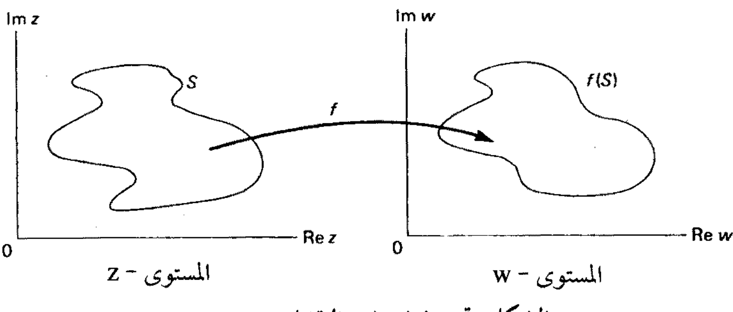
بوضع $z=x+iy$ نجد أن:

$$w=z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i(2xy)$$

إذن :

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$
$$v(x, y) = 2xy$$

تمثل الدوال الحقيقية ذات المتغير الحقيقي من الشكل $y = f(x)$ بيانيا في المستوى xy منحنيا ولكن لا يوجد تمثيل متعارف عليه للدالة $w = f(z)$ لأننا سنحتاج إلى أربعة أبعاد : أثنين لكل متغير مركب، ونعرض المعلومات عن الدالة w ونرسمها بيانيا في مستويين منفصلين، أحدهما للمتغير z والآخر للمتغير w بحيث نحدد التقابل الكائن بين مجموعة من النقاط في المستوى الأول إلى صورها في المستوى الثاني (انظر الشكل رقم ١,١٨).



الشكل رقم (١٨ ,١). التقابل $w = f(z)$

تسمى الدالة f تطبيقا من المجموعة S في المستوى z إلى المستوى w. الدالة f من المجموعة S إلى المجموعة S' على الشكل $f: S \to S'$ تسمى أحادية إذا كان :

$$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$$

وتسمى غامرة إذا كان $S' = f(S)$ حيث $f(S)$ هي مجموعة القيم المكتسبة بواسطة الدالة f على المجموعة S. نسمى* $f(S)$ بمجموعة صورة المجموعة S تحت تأثير الدالة f.

* تسمى الدوال الأحادية في العادة متباينة، العليا تسمى غامرة والتي تكون متباينة وغامرة تسمى تقابل.

مثال (٢ ,٤ ,١)

أدرس خواص الدالة $w = 3z$.

الحل

بوضع $z = x + iy$ نحصل على:

$$w = u + iv = 3x + i(3y)$$

عندئذ $u = 3x$ و $v = 3y$

وكل متجه غير صفري في المستوى z، يقابله في المستوى w متجه له نفس الزاوية مع المحور الأفقي، ولكن طوله ثلاثة أضعاف طوله في z حيث تكون أي نقطة $a + ib$ في المستوى w صورة النقطة $(a/3) + i(b/3)$ في المستوى z، الدالة $w = 3z$ تكون غامرة أحادية أيضا لأن:

$$3z_1 = 3z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$$

مثال (٣ ,٤ ,١)

صف صورة الدالة $w = z^2$ المعرفة على القرص $|z| < 2$، وبين فيما إذا كان التقابل أحاديا أم غير أحادي.

الحل

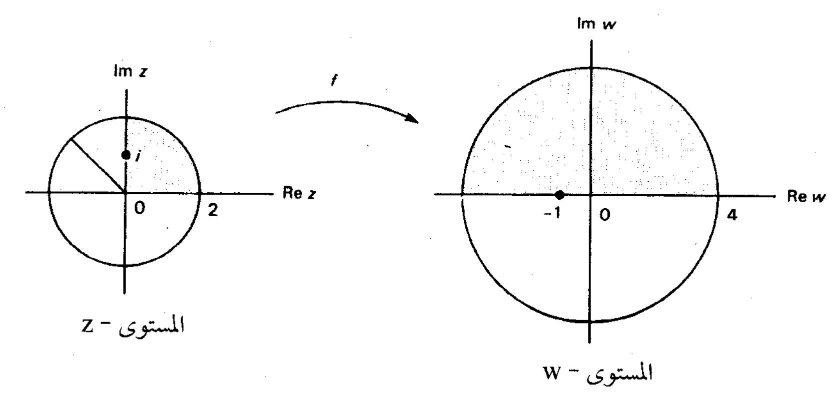
بكتابة كل نقطة من نقاط القرص في إحداثياتها القطبية:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

حيث $0 \le r = |z| < 2$ و $0 \le \theta < 2\pi$ نحصل على:

$$w = z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

ومـن ذلـك نستنتـج أن كـل زاويــة تتضاعــف قيمتها، وأن صـورة القرص $|z| < 2$ هي القـــرص $|w| < 4$ وإن كـل نقطة من $0 < |w| < 4$ تكـون صـــورة لنقطتـين مــن $0 < |z| < 2$. فعلى سبيل المثال، للنقطتان $z = \pm i$ صـورة واحـدة هـي $w = -1$، إذن الدالة f ليست أحادية. (انظر الشكل رقم ١٩, ١).



الشكل رقم (١٩ ,١). التقابل $w = z^2$.

مثال (٤, ٤, ١)

حدد فيما إذا كانت الدالة $w = \dfrac{z-1}{z-2}$ أحادية أم لا، وأذكر مجال تعريف الدالة.

الحل

لنفرض أن لصورتي العددين z_2 و z_1 نفس القيمة w:

$$\frac{z_1 - 1}{z_1 - 2} = \frac{z_2 - 1}{z_2 - 2}$$

بضرب الطرفين والوسطين نحصل على:

$$z_1 z_2 - 2z_1 - z_2 + 2 = z_1 z_2 - z_1 - 2z_2 + 2$$

بالاختصار، نحصل على $z_1 = z_2$، وبالتالي تكون الدالة أحادية.

يعتمد الجواب للجزء الثاني على معرفة ماهية قيم w المسموح بها، فإذا كانت w مقتصرة على المستوى المركب $\mathbf{C}$، فإن الدالة تكون غير معرفة عند $z = 2$ حيث ينعدم المقام، وعلى كل حال، إذا سمحنا للمقدار w ليأخذ جميع القيم في المستوى الممتد $\boldsymbol{M}$، فإن الدالة يمكن أن تعرف على $\boldsymbol{M}$ ، علما أن صورة $z = 2$ هي $w = \infty$، والصورة للنقطة ∞ يمكن الحصول عليها كما يلي:

$$w = \frac{z-1}{z-2} = \frac{1-\dfrac{1}{z}}{1-\dfrac{2}{z}}$$

عندما $z \to \infty$ ولهذا فإن صورة $z = \infty$ هي $w = 1$. (انظر التمرين رقم ٢٦).

لنفرض أن f معرفة على المنطقة G، وأن a نقطة من G. إذن النهايات والاتصال تعرف بنفس الطريقة التي عرفت للمتغير الحقيقي.

تعريف

يقال إن للدالة $f(z)$ نهاية A عندما تقترب z من a، ونكتب:

$$\lim_{z \to a} f(z) = A$$

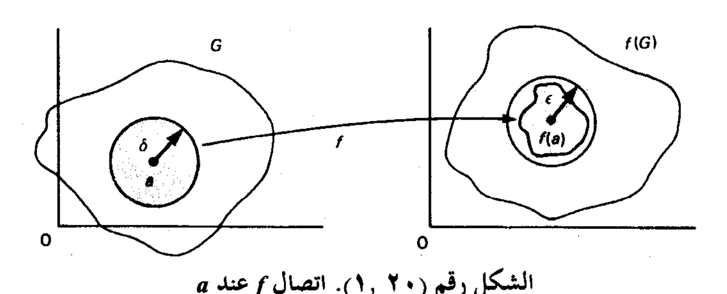
وذلك إذا وجد لكل $0 < \varepsilon$ عدد $0 < \delta$ على أن يكون $|f(z) - A| < \varepsilon$ عندما يكون $0 < |z-a| < \delta$.

ويقال إن الدالة $f(z)$ متصلة عند a إذا وفقط إذا:

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$$

(انظر الشكل رقم ١,٢٠).

الدالة المتصلة هي التي تكون متصلة عند جميع النقاط المعرفة عندها الدالة.



الشكل رقم (١, ٢٠). اتصال f عند a

هندسيا: نستنتج من تعريف النهاية أن أي جوار $-\varepsilon$ إلى A يحوي جميع قيم f الموافقة لنقاط الجوار $-\delta$ إلى a ، ومن الممكن استثناء القيمة $f(a)$، ويوضح المثال التالي الطريقة المعتادة في حساب δ للقيمة $\varepsilon > 0$ المعطاة.

مثال (١, ٤, ٥)

أثبت أن : $\lim_{z\to 3}\frac{z-1}{z-2}=2$

الحل

بتبسيط المقدار $|f(z)-A|$ نحصل على

$$|f(z)-A|=\left|\frac{z-1}{z-2}-2\right|=\left|\frac{3-z}{z-2}\right|<\frac{\delta}{|z-2|}$$

حيث افترضنا أن $0<|z-3|<\delta$ مع وجوب حساب δ بدلالة ε. إذا كان $\delta<\frac{1}{2}$ باستخدام المتراجحة المتباينة المثلثية نحصل على :

$$|z-2|=|1-(3-z)|\geq 1-|3-z|>1-\delta>\frac{1}{2}$$

عندئذ

$$\left|\frac{z-1}{z-2}-2\right|<2\delta$$

وعليه، إذا كان $\varepsilon > 0$ معطى، نختار: $\delta < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\varepsilon\right)$

فنجد

$$\left|\frac{z-1}{z-2} - 2\right| < \varepsilon$$

إن تعريف النهاية للدالة المركبة- ذات المتغير المركب- هو نفسه الذي يُعطى للدالة الحقيقية ذات المتغير الحقيقي، والقيمة المطلقة هي نفسها كما في الدوال الحقيقية بالضبط، لذا تطبق نفس قواعد النهايات. والتحقق من الخواص التالية، له الإثبات نفسه والمعتاد في التفاضل والتكامل.

قواعد النهايات

إذا كان $\lim_{z\to a} f(z) = A$ و $\lim_{z\to a} g(z) = B$ فإن:

$$\text{(i)} \lim_{z\to a}\left[f(z) \pm g(z)\right] = A \pm B$$

$$\text{(ii)} \lim_{z\to a}\left[f(z)g(z)\right] = AB$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B},\ B \neq 0$$

البرهان

إذا كان $\varepsilon > 0$ عدد معطى، فإنه يوجد عدد $\delta_1 > 0$ حيث $|f(z) - A| < \varepsilon$ عندما تكون $|z-a| < \delta_1$، وعدد $\delta_2 > 0$ حيث $|g(z) - B| < \varepsilon$ عندما يكون $|z-a| < \delta_2$.

نضع $|z-a| < \delta$ حيث $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$، باستخدام المتراجحة (المتباينة) المثلثية نجد:

$$\left|\left[f(z) + g(z)\right] - (A+B)\right| = \left|\left[f(z) - A\right] + \left[g(z) - B\right]\right| \leq \left|f(z) - A\right| + \left|g(z) - B\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

و

$$\left|[f(z)-g(z)]-(A-B)\right|=\left|[f(z)-A]+[B-g(z)]\right|\le\left|f(z)-A\right|+\left|g(z)-B\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ اختيارية ، فإنه يثبت أن $f(z)\pm g(z)$ يمكن أخذها قريبة من $A\pm B$ باختيار z قريبة من a، حينئذ القاعدة (i) صحيحة ، علاوة على ذلك فإن :

$$\begin{aligned}\left|f(z)g(z)-AB\right|&=\left|f(z)g(z)-f(z)B+f(z)B-AB\right|\\&=\left|f(z)[g(z)-B]+B[f(z)-A]\right|\\&\le\left|f(z)\right|\left|g(z)-B\right|+\left|B\right|\left|f(z)-A\right|\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z)}{g(z)}-\frac{A}{B}\right|&=\left|\frac{f(z)}{g(z)}-\frac{f(z)}{B}+\frac{f(z)}{B}-\frac{A}{B}\right|\\&=\left|\frac{f(z)[B-g(z)]}{Bg(z)}+\frac{f(z)-A}{B}\right|\\&\le\frac{\left|f(z)\right|}{\left|B\right|\left|g(z)\right|}\left|B-g(z)\right|+\frac{\left|f(z)-A\right|}{\left|B\right|}\end{aligned}$$

إذا كان $0<\varepsilon<\frac{1}{2}\left|B\right|$ فإن

$$\left|B\right|=\left|B-g(z)+g(z)\right|\le\varepsilon+\left|g(z)\right|$$

وعليه

$$\left|g(z)\right|\ge\left|B\right|-\varepsilon>\frac{1}{2}\left|B\right|$$

وعليه

$$\left|f(z)\right|=\left|f(z)-A+A\right|\le\left|A\right|+\varepsilon$$

إذن

$$\left|f(z)g(z)-AB\right|\le\varepsilon\left(\left|A\right|+\left|B\right|+\varepsilon\right)$$

و

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}-\frac{A}{B}\right|<\frac{\varepsilon}{|B|}\left(\frac{|A|+\varepsilon}{\frac{1}{2}|B|}+1\right)$$

وعليه، يمكن أخذ $f(z)g(z)$ و $f(z)/g(z)$ قريبة من AB و A/B على الترتيب باختيار z قريبة من a. ويثبت هذا كلا من القاعدة (ii) و القاعدة (iii) . ■

يمكن أن تستخدم قواعد النهايات لإثبات أن كل دالة كثيرة حدود في z:

$$f(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0$$

تكون متصلة على C. نلاحظ أن دالة الوحدة $f(z)=z$ دالة متصلة عند أي نقطة وذلك بوضع $\delta=\varepsilon$ وبتكرار تطبيق القاعدة الثانية من النهايات، نلاحظ أن $f(z)=z^n$ تكون متصلة لكل عدد n صحيح موجب. ومن الواضح أن كل دالة ثابتة $f(z)=c$ تكون متصلة حيث صورة أي جوار $-\delta$ لأي نقطة z في جوار $-\varepsilon$ للنقطة c. مرة ثانية، بتطبيق القاعدة الثانية من النهايات نلاحظ أن $f(z)=a_n z^n$ تكون متصلة.

وأخيرا، بتكرار استخدام القاعدة الأولى للنهايات، نلاحظ أن جميع كثيرات الحدود متصلة حقا. باستخدام القاعدة الثالثة للنهايات نجد أن قسمة كثيرتي حدود:

$$\frac{a_n z^n+\ldots+a_1 z+a_0}{b_m z^m+\ldots+b_1 z+b_0}$$

تكون متصلة عند النقاط التي يكون فيها المقام لا يساوي صفرا كما ينتج من قواعد النهايات أن مجموع $f(z)+g(z)$ وناتج الضرب $f(z)g(z)$ لدالتين متصلتين يكون متصلا، وكذلك $f(z)/g(z)$ يكون متصلاً عندما يكون $g(z)$ لا يساوي الصفر.

مثال (٦, ٤, ١)

حدد فيما إذا كانت الدالة:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2-1}{z-1}, & z\neq 1\\ 3, & z=1\end{cases}$$ متصلة أم لا.

الحل

من الواضح أن f متصلة على المجموعة $z \neq 1$ حيث المقام لا يساوي الصفر. لذلك، النقطة الوحيدة التي يجب أن ندرس الاتصال عندها هي $z=1$.
على كل حال:

$$\lim_{z\to 1}\frac{z^2-1}{z-1}=2$$

لأن

$$\frac{z^2-1}{z-1}=z+1,$$

وذلك إذا كان $z \neq 1$ ، ولكن من التعريف $f(1)=3\neq 2$. إذن f غير متصلة.

تمارين (٤, ١)

استخدم تعريف $\varepsilon-\delta$ للنهاية لإثبات التمارين من (١) إلى (١٠):

(١) $\lim_{z\to 1} 2z=2$

(٢) $\lim_{z\to i} iz=-1$

(٣) $\lim_{z\to -i} z+i=0$

(٤) $\lim_{z\to i} z^2+1=0$

(٥) $\lim_{z\to 1+i} 2z-3=-1+2i$

(٦) $\lim_{z\to 1+i} z^2=2i$

(٧) $\lim_{z\to 2}\dfrac{z^2-4}{z-2}=4$

(٨) $\lim_{z\to -i}\dfrac{z^2+1}{z+i}=-2i$

(٩) $\lim_{z\to 1}\dfrac{z^3-1}{z-1}=3$

(١٠) $\lim_{z\to 2}\dfrac{z^2-3z+2}{z-2}=1$

أثبت أن الدوال في التمارين من (١١) إلى (١٤) دوال متصلة في C:

(١١) $w = \operatorname{Re} z$ (١٢) $w = \operatorname{Im} z$

(١٣) $w = \bar{z}$ (١٤) $w = |z|$

لنفرض أن $f(z)$ دالة متصلة على المنطقة G، أثبت أن الدوال في التمارين من (١٥) إلى (١٨) متصلة على G:

(١٥) $\operatorname{Re} f(z)$ (١٦) $\operatorname{Im} f(z)$

(١٧) $|f(z)|$ (١٨) $f(\bar{z})$

(١٩) عند أي النقاط تكون الدالة:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3 - 1}{z^2 - 1}, & z \neq \pm 1 \\ \dfrac{3}{2}, & z = \pm 1 \end{cases}$$ متصلة؟

أثبت أن الدوال في التمارين من (٢٠) إلى (٢٣) تكون متصلة من أجل $z \neq 0$.

هل يمكن تعريف الدالة عند $z = 0$ حتى تكون متصلة؟

(٢٠) $f(z) = \dfrac{z \operatorname{Re} z}{|z|^2}$ (٢١) $f(z) = \dfrac{|z|^2}{z}$

(٢٢) $f(z) = \dfrac{(\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z)}{|z|^2}$ (٢٣) $f(z) = \dfrac{(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2}{|z|^2}$

(٢٤) أثبت أن كل دالة على الشكل

$$w = \frac{z - a}{z - b}, \qquad a \neq b$$

تكون أحادية من المستوى الممتد M على نفسه.

(٢٥) أثبت أن كل دالة على الشكل:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad ad \neq bc$$

تكون دالة أحادية من المستوى الممتد M على نفسه.

(٢٦) الدالة $f(z)$ لها نهاية A عندما تقترب z من ∞ :

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = A$$

إذا وجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ بحيث يكون :

$$|z| > \delta \quad \text{عندما} \quad |f(z) - A| < \varepsilon$$

استخدم هذا التعريف لإثبات أن :

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z-1}{z-2} = 1$$

(٢٧) لنفترض أن المعاملات لكثيرة الحدود :

$$P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$$

تحقق :

$$|a_0| \geq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

أثبت أن $P(z)$ لا يوجد لها جذور في قرص الوحدة :

$$|z| < 1$$

(إرشاد: لاحظ أن :

$$|p(z)| \geq |a_0| - [|a_1||z| + \ldots + |a_n||z|^n]$$

(٥ ,١) الشروط الضرورية للتحليلية

Necessary Conditions for Analyticity

تعرف المشتقة للدالة المركبة ذات المتغير المركب بالضبط بنفس الطريقة المتبعة للدالة الحقيقية في موضوع التفاضل والتكامل.

تعريف

المشتقة f' للدالة f عند a تعطى بالعلاقة :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

وذلك عندما تكون النهاية موجودة.

تسمى الدالة تحليلية analytic (holomorphic) على المنطقة G إذا وجد لها مشتقة عند جميع نقاط G ، وتسمى كلية (entire) إذا كانت تحليلية على جميع **C**.

لاحظ أن h في التعريف المذكور أعلاه تكون عددا مركبا كما هو في القسمة

$$[f(a+h) - f(a)]/h$$

فإنه لكي تكون المشتقة موجودة ، فمن الضروري أن تقترب هذه القسمة من عدد مركب وحيد $f'(a)$ مستقل عن كيفية اقتراب h من الصفر.

تمهيدية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند a فإن f تكون متصلة عند a .

البرهان

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0}\left\{\left|\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right|.h + f(a)\right\}$$
$$= f(a). \quad \blacksquare$$

باستخدام تعريف المشتقة نتوصل إلى القواعد المعتادة للاشتقاق :

$$(f \pm g)' = f' \pm g',$$
$$(fg)' = fg' + gf',$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}, g \neq 0,$$

ونتوصل كذلك إلى قاعدة السلسلة :

$$(f(g(z)))' = f'(g(z))g'(z),$$

والبراهين هي نفس البراهين التي تناولناها عند دراسة مبادئ التفاضل والتكامل، فعلى سبيل المثال:

$$(fg)'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a) - f(a)g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(a+h)\cdot\frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a)\cdot\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]$$

$$= f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$$

تشتق كثيرات الحدود والدوال الكسرية بنفس الطريقة التي وجدناها عند دراسة مبادئ التفاضل والتكامل. فمثال ذلك، لنفترض أن $f(z) = z^n$ ، n عدد صحيح موجب، فباستخدام نظرية ذات الحدين نحصل على:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^n - z^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(z^n + nz^{n-1}h + \dots + h^n\right) - z^n}{h} = nz^{n-1}$$

وبالأخص، نستنتج أن كثيرة حدود

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

تكون كلية لأن لها مشتقة عند كل نقطة من $\mathbf{C}$ هي:

$$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + na_n z^{n-1}$$

بالرغم من هذه التشابهات، يوجد فرق أساسي بين اشتقاق الدوال ذات المتغير الحقيقي، والدوال ذات المتغير المركب. لنضع $z = (x, y)$ ولنفترض أن h عدد حقيقي، وبالتالي فإن:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(z)$$

ولكن إذا كان $h = ik$ عددا تخيليا فإن :

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{ik} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z) = -if_y(z)$$

إذن وجود مشتقة مركبة، يوجب على الدالة أن تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية التالية :

$$f_x = -if_y$$

بكتابة : $f(z) = u(z) + iv(z)$، حيث v وu دوال حقيقية لمتغير مركب. وبمساواة الجزء الحقيقي بما يساويه، والجزء التخيلي بما يقابله في المعادلة :

$$u_x + iv_x = f_x = -if_y = v_y - iu_y,$$

نحصل على معادلتي كوشي- ريمان Cauchy-Riemann التفاضلية :

$$\boxed{u_x = v_y \quad , \quad v_x = -u_y}$$

وبهذا نكون قد أثبتنا النظرية التالية :

نظرية

إذا كانت الدالة $f(z) = u(z) + iv(z)$ لها مشتقة عند النقطة z، فإن المشتقات الجزئية الأولى لكل من u وv بالنسبة إلى x و y تكون موجودة وتحقق معادلتي كوشي- ريمان.

مثال

لنفترض أن :

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

بما أن f كلية، فإن $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$ تحققان معادلتي كوشي - ريمان. لاحظ أن :

$$-u_y = 2y = v_x \text{ و } u_x = 2x = v_y$$

من الناحية الأخرى إذا كان:

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$$

فإن

$$u = x^2 + y^2, v = 0$$

وأن

$$u_x = 2x, \quad u_y = 2y, \quad v_x = 0 = v_y$$

وعليه فإن f تحقق معادلتي كوشي - ريمان فقط عند 0. علاوة على ذلك f لها مشتقة عند $z = 0$ حيث:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{|h|^2}{h} = \lim_{h \to 0} \bar{h} = 0$$

تمارين (١,٥)

في المسائل من (١) إلى (٤) أثبت أن كل دالة تحقق معادلتي كوشي - ريمان:

(١) $f(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$

(٢) $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

(٣) $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos \sinh y$

(٤) $f(z) = e^{x^2 - y^2} (\cos 2xy + i \sin 2xy)$

باستخدام قواعد الاشتقاق، أوجد المشتقات المركبة للدوال في المسائل من (٥) إلى (٨):

(٥) $f(z) = 18z^3 - \dfrac{z^2}{4} + 4z + 8$

(٦) $f(z) = (2z^3 + 1)^5$

(٧) $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}, \qquad z \neq 1$

(٨) $f(z) = z^3(z^2+1)^{-2}, \qquad z \neq \pm i$

لنفترض أن g, f دالتان تحليليتان معرفتان على المنطقة G. أثبت قواعد الاشتقاق المذكورة في التمرينين (٩) و (١٠).

(٩) $(f \pm g)' = f' \pm g'$

(١٠) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{gf' - fg'}{g^2}$ ، $g(z) \neq 0$ لكل z في G.

(١١) بين أن النسبة $P(z)/Q(z)$ لكثيرتي حدود، لها مشتقة عند كل نقطة ؛ حيث $Q(z) \neq 0$.

مستخدما معادلتي كوشي - ريمان، أثبت أن الدوال في التمارين من (١٢) إلى (١٥) لا يوجد لها مشتقة عند أي نقطة في $\mathbf{C}$.

(١٢) $f(z) = \bar{z}$ (١٣) $f(z) = \operatorname{Re} z$

(١٤) $f(z) = \operatorname{Im} z$ (١٥) $f(z) = |z|$

استخدم معادلتي كوشي - ريمان، وتعريف المشتقة لتحديد المنطقة التي تكون فيها الدوال في التمارين من (١٦) إلى (١٩) قابلة للاشتقاق :

(١٦) $f(z) = \bar{z}^2$ (١٧) $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$

(١٨) $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re} z$ (١٩) $f(z) = z \operatorname{Im} z$

(٢٠) أثبت قاعدة السلسلة للتفاضل :

$$[f(g(z))]' = f'(g(z))g'(z),$$

مع الافتراض أن كلا من f و g كلية.

(٢١) باستخدام قاعدة السلسلة أثبت أن دالة كلية لدالة كلية هي دالة كلية.

*(٢٢) إذا كانت جميع أصفار كثيرة الحدود $P(z)$ لها جزء حقيقي سالب. أثبت أن الأمر نفسه صحيح لكل أصفار $P'(z)$.

(**إرشاد :** حلل $P(z)$، اعتبر $P'(z)/P(z)$).

(٢٣) إذا عُبّر عن u و v بدلالة الإحداثيان القطبيان (r,θ) ، بين أن معادلتي كوشي- ريمان يمكن كتابتهما على الصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}, \quad r\neq 0$$

(٢٤) أثبت أن الدالة :

$$f(z)=r^5(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)$$

تحقق معادلتي كوشي -ريمان في الشكل القطبي لجميع $z\neq 0$.

(٦ ,١) الشروط الكافية للتحليلية

Sufficient Conditions for Analyticity

الآن يمكن أن يتساءل أحدنا ، هل معادلتا كوشي - ريمان كافيتان لضمان وجود المشتقة عند نقطة معطاة؟ يوضح المثال التالي بوساطة D.Menchoff أن هذا غير صحيح. لنفترض أن :

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^5}{|z|^4}, & z\neq 0\\[2mm] 0, & z=0\end{cases}$$

بالتالي فإن :

$$\frac{f(z)}{z}=\left(\frac{z}{|z|}\right)^4, \qquad z\neq 0,$$

يكون لها القيمة 1 على المحور الحقيقي ، والقيمة 1- على الخط المستقيم $y=x$ ، إذن لا يوجد لـ f مشتقة عند $z=0$ ، ولكن بكتابة الصيغة المفصلة إلى f نجد أن :

$$u(x,0)=x, \qquad u(0,y)=0=v(x,0), \qquad v(0,y)=y.$$

إذن :

$$u_x(0,0)=1=v_y(0,0) \qquad -u_y(0,0)=0=v_x(0,0),$$

ومعادلتي كوشي - ريمان محققتان. وعلى كل حال، يكون لدينا النظرية التالية.

نظرية

لتكن $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ معرفة في منطقة معينة G تحتوي النقطة z_0 ، ومشتقاتها الجزئية من الرتبة الأولى متصلة بالنسبة إلى x وy، وتحقق معادلتي كوشي - ريمان عند النقطة z_0 ، عندئذ $f'(z_0)$ تكون موجودة .

البرهان

نفترض أن $x \neq x_0$ و$y \neq y_0$ فالفرق الكسري يمكن كتابته على الشكل :

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)}{z-z_0}+i\frac{v(x,y)-v(z_0,y_0)}{z-z_0}$$

$$=\frac{x-x_0}{z-z_0}\left[\frac{u(x,y)-u(x_0,y)}{x-x_0}+i\frac{v(x,y)-v(x_0,y)}{x-x_0}\right]$$

$$+\frac{y-y_0}{z-z_0}\left[\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{y-y_0}+i\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{y-y_0}\right]$$

$$=\frac{x-x_0}{z-z_0}\{u_x(x_0+t_1(x-x_0),y)+iv_x(x_0+t_2(x-x_0),y)\}$$

$$+\frac{y-y_0}{z-z_0}\{u_y(x_0,y_0+t_3(y-y_0))+iv_y(x_0,y_0+t_4(y-y_0))\}$$

حيث $0<t_k<1, k=1,2,3,4$. وذلك باستخدام نظرية القيمة المتوسطة لحساب التفاضل. وهذه النتيجة أيضا صحيحة لقيم $x=x_0$ أو $y=y_0$.

وبما أن المشتقات الجزئية متصلة عند z، فمن الممكن أن نكتب:

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{x-x_0}{z-z_0}\left[u_x(z_0)+iv_x(z_0)+\varepsilon_1\right]$$

$$+\frac{y-y_0}{z-z_0}\left[u_y(z_0)+iv_y(z_0)+\varepsilon_2\right]$$

حيث $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$ عندما $z\to z_0$.

وبتطبيق معادلتي كوشي - ريمان للحد الأخير يمكن تجميع الحدود والحصول على المساواة :

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=u_x(z_0)+iv_x(z_0)+\frac{(x-x_0)\varepsilon_1+(y-y_0)\varepsilon_2}{z-z_0}$$

لأن

$$|x-x_0|,|y-y_0|\leq|z-z_0|$$

وبالتالي فإن المتراجحة المثلثية تعطي :

$$\left|\frac{(x-x_0)\varepsilon_1+(y-y_0)\varepsilon_2}{z-z_0}\right|\leq|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|\to 0 \quad \text{عندما} \quad z\to z_0$$

إذن يقترب الحد الأخير من الصفر عندما $z\to z_0$ وبأخذ النهاية نحصل على المساواة :

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=u_x(z_0)+iv_x(z_0)$$

وبصورة خاصة، إذا كانت الفرضية في النظرية محققة لجميع نقاط G، فإن f تكون تحليلية في G. ■

مثال (١, ٦, ١)

وضح أن الدالة :

$$f(z)=e^{x^2-y^2}(\cos 2xy+i\sin 2xy)$$

تكون كلية.

الحل

يجب أن نختبر أولا اتصال المشتقات الجزئية :

$$v=e^{x^2-y^2}\sin 2xy \quad \text{و} \quad u=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$$

وتحقق معادلتي كوشي - ريمان عند جميع نقاط **C** من الواضح أن :

$$u_x=2e^{x^2-y^2}(x\cos 2xy-y\sin 2xy)=v_y$$

وأن

$$-u_y = 2e^{x^2-y^2}\left(y\cos 2xy + x\sin 2xy\right) = v_x$$

دوال متصلة في C وعليه فإن $f(z)$ كلية.

مثال (١,٦,٢)

صف المنطقة التي تكون عندها الدالة f تحليلية :

$$f(x) = \frac{(x-1)-iy}{(x-1)^2+y^2}$$

الحل

المشتقات الجزئية الأولى لكل من $u = \operatorname{Re} f$ و $v = \operatorname{Im} f$ تحقق :

$$u_x = \frac{y^2-(x-1)^2}{\left[(x-1)^2+y^2\right]^2} = v_y$$

$$u_y = \frac{-2y(x-1)}{\left[(x-1)^2+y^2\right]^2} = -v_x$$

هذه الدوال متصلة لجميع $z \neq 1$. لاحظ أن $f(z)$ غير معرفة عند $z = 1$ وبالتالي فإن $f(z)$ تحليلية لجميع $z \neq 1$.

عرفنا أنه في حالة المتغير الحقيقي وفي دراستنا لمبادئ التفاضل والتكامل، وعندما تكون مشتقة الدالة تساوي صفرا على فترة معينة، فإن الدالة تكون ثابتة على تلك الفترة. ونفس النتيجة تكون صحيحة في حالة المتغير المركب.

نظرية المشتقة الصفرية Zero derivative theorem

إذا كانت f تحليلية على منطقة G و $f'(z) = 0$ عند كل نقطة z من G. فإن f تكون ثابتة على G ويبقى الاستنتاج صحيحا إذا كانت أي من $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f, |f|$ أو $\arg f$ ثابتا على G.

البرهان

بما أن $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z)$ فإن انعدام المشتقة يؤدي إلى أن : $v_x = -u_y$ و$u_x = v_y$ كلاهما يساوي الصفر. إذن u وv مقداران ثابتان على المستقيمات الموازية لمحوري الإحداثيات، وبما أن G مترابطة، بمعنى أنه يمكن وصل أي نقطتن فيها بمضلع، (انظر النظرية والملاحظات التي تلي برهانها في الجزء ١,٣)، فإن $f = u + iv$ ثابتة على G.

إذا كانت u (أو v) ثابتة، فإن $v_x = -u_y = 0 = u_x = v_y$ ومنه نجد أن :

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = 0 .$$

وبالتالي فإن f ثابتة.

إذا كان $|f|$ مقدارا ثابتا، فإن $|f|^2$ أيضا ثابت، ومن المساواة :

$$|f|^2 = u^2 + v^2$$

يتضح أن :

$$uu_x + vv_x = 0 \quad \text{و} \quad uu_y + vv_y = vu_x - uv_x = 0$$

بحل هاتين المعادلتين في u_x, v_x نجد أن $u_x = v_x = 0$ ما لم يكن $u^2 + v^2 = 0$. وبما أن $|f|^2 = u^2 + v^2$ مقدار ثابت، فإنه إذا كان $u^2 + v^2 = 0$ عند نقطة واحدة، فإن $|f|$ عدد ثابت يساوي الصفر وأن f تكون مطابقة للصفر. وما عدا ذلك فإن المشتقة تساوي الصفر وتكون f ثابتة.

إذا كان $\arg f = c$ فإن $f(G)$ تكون واقعة على الخط المستقيم $v = (\tan c)\ u$ ما لم يكن $u \equiv 0$ ، وفي هذه الحالة نكون قد انتهينا. ولكن $(1 - i\tan c)f$ تحليلية و :

$$\operatorname{Im}(1 - i\tan c)f = v - (\tan c)u = 0,$$

ويؤدي هذا إلى أن $(1-i\tan c)f$ ثابت ، وعليه تكون f ثابتة أيضا. ■

تمارين (١,٦)

أثبت أن كل من الدوال في التمارين من (١) إلى (٥) دالة كلية :

(١) $f(z)=e^{x}(\cos y+i\sin y)$

(٢) $f(z)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$

(٣) $f(z)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$

(٤) $f(z)=\left(x^{3}-3xy^{2}\right)+i\left(3x^{2}y-y^{3}\right)$

(٥) $f(z)=\sin(x^{2}-y^{2})\cosh(2xy)+i\cos(x^{2}-y^{2})\sinh(2xy)$

في التمارين من (٦) إلى (٨) أذكر المنطقة التي تكون فيها الدالة المذكورة تحليلية :

(٦)
$$f(z)=\frac{x}{x^{2}+y^{2}}-i\frac{y}{x^{2}+y^{2}}$$

(٧)
$$f(z)=\sin\left(\frac{x}{x^{2}+y^{2}}\right)\sinh\left(\frac{y}{x^{2}+y^{2}}\right)-i\cos\left(\frac{x}{x^{2}+y^{2}}\right)\sinh\left(\frac{y}{x^{2}+y^{2}}\right)$$

(٨)
$$f(z)=\tfrac{1}{2}\log\left(x^{2}+y^{2}\right)+i\arctan\frac{y}{x}$$

(٩) بين أن الدالة :

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^{-3}}{|z|^{2}}, & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$$

عند $z=0$ ، تحقق معادلتي كوشي - ريمان ، ولكن لا يوجد لها مشتقة.

(١٠) بين أن الدالة

$$f(z)=\begin{cases} e^{\frac{-1}{z^4}} , & z\neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$$

تحقق معادلتي كوشي - ريمان عند النقطة $z=0$. ولكن لا يوجد لها مشتقة عند تلك النقطة.

(١١) إذا كان كل من $f(z)=u+iv$ و $\overline{f}=u-iv$ دالة تحليلية ، أثبت أن f دالة ثابتة.

(١٢) لنفترض أن $f(z)=u+iv$ دالة كلية ولنفترض أن $u\cdot v$ ثابت. أثبت أن f دالة ثابتة.

(١٣) إذا كان $f(z)=u+iv$ دالة كلية وأن $v=u^2$ ثابت. أثبت أن f دالة ثابتة.

(١٤) إذا كان $f(z)=u+iv$ دالة كلية وأن $u^2=v^2$. أثبت أن f دالة ثابتة.

(١٥) لنفترض أن الدالة التحليلية f حقيقية على المنطقة G. أثبت أن f دالة ثابتة على G.

(١٦) لنفترض أن $z_1=1$ ، $f(z)=z^3$ و $z_2=i$ أثبت أنه لا يوجد نقطة z_0 على القطعة المستقيمة من z_1 إلى z_2 تحقق المساواة :

$$f(z_2)-f(z_1)=f(z_0)(z_2-z_1)$$

يبين هذا أن نظرية القيمة المتوسطة للدوال الحقيقية لا تعمم إلى الدوال المركبة.

(١٧) إذا كان $z=x+iy$ بين أنه لا توجد دالة كلية تكون مشتقتها المقدار $f(z)=x$.

(١,٧) الأس المركب The Complex Exponential

رأينا في القسم (١,٤) في موضوع كثيرات الحدود أن الدوال الكسرية في المتغير الحقيقي تعطي دوالا تحليلية عندما يستبدل المتغير الحقيقي بمتغير مركب z. لا يعني هذا أنه مثال منفرد للدوال التحليلية. في الحقيقة ، جميع الدوال الأولية في حساب التفاضل والتكامل- مثل الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية- تعطى دوالا تحليلية بعد تمديد

مناسب للمستوى المركب. وفي الأقسام الثلاثة التالية سنقدم تعميما لهذه الدوال الأولية مع ذكر بعض خواصها.

نبدأ بالدالة الأسية e^x . نرغب في تعريف دالة $f(z) = e^z$ تكون تحليلية وتساوي الدالة الحقيقية e^x عندما يكون z عددا حقيقيا. بالعودة إلى الدالة الأسية الحقيقية ، نرى أنها ناتجة عن حل المعادلة التفاضلية.

$$f'(x) = f(x), \qquad f(0) = 1$$

نتساءل فيما إذا وجد حل تحليلي للمعادلة التفاضلية :

$$f'(z) = f(z), \qquad f(0) = 1$$

فإذا وجد هذا الحل ، فمن الضروري أن يساوي e^x عندما تكون $z = x$ ، كما تحققه المعادلة المحددة على المحاور الحقيقية من تعريف f' نجد أن :

$$u_x + iv_x = u + iv, \quad u(0) = 1, \ \ v(0) = 0.$$

حيث $v_x = v$ و $u_x = u$ وبفصل المتغيرات نحصل على :

$$u(x, y) = p(y)e^x$$

$$v(x, y) = q(y)e^x$$

ومن الشروط البدائية نجد أن $q(0) = 0$ و $p(0) = 1$، وباشتقاق المعادلتين بالنسبة إلى y مع تطبيق معادلتي كوشي - ريمان نحصل على :

$$p'(y)e^x = u_y = -v_x = -q(y)e^x, \qquad q'(y)e^x = v_y = u_x = p(y)e^x.$$

إذن $p' = -q,$ و $q' = p$ وبالتالي :

$$p'' = -q' = -p \text{ و } q'' = p' = -q$$

وأن p, q حلان للمعادلة التفاضلية الحقيقية :

$$\phi''(y) + \phi(y) = 0$$

تكون جميع حلول هذه المعادلة على الشكل $A\cos y + B\sin y,$ حيث A و B مقداران ثابتان.

وحيث إن: $q'(0) = p(0) = 1, p'(0) = -q(0) = 0,$

فيجب أن نحصل على: $p(y) = \cos y, q(y) = \sin y$

إذ نحصل على الدالة:

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i\sin y)$$

التي تتطابق مع e^x عندما تكون $z = x$ ، وهي تحليلية لأن بناء الدالة يضمن أن المشتقات الجزئية تكون متصلة وتحقق معادلتي كوشي - ريمان.

تعريف

الأس المركب يعطى بالشكل:

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

وهي دالة كلية غير صفرية تحقق المعادلة التفاضلية:

$$f'(z) = f(z), \quad f(0) = 1$$

ومن الملاحظ أن $e^z \neq 0$ لأن كلا من e^x والمقدار $\cos y + i\sin y$ لا يساويان الصفر. لاحظ أيضا عندما $z = x + iy$ فإن:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y, \quad \left|e^{iy}\right| = 1$$

وعليه فإن التمثيل القطبي للعدد المركب يصبح (انظر القسم ١,٢):

$$z = |z|e^{i\arg z}$$

إذا كان $z_2 = x_2 + iy_2$ و $z_1 = x_1 + iy_1$ ، فإن صيغ الجمع للدوال المثلثية يعطي:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2)$$

$$= e^{x_1+x_2}\left[(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)\right]$$

$$= e^{x_1+x_2}\left[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)\right]$$

$$= e^{z_1+z_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

وبما أن

$$e^{z_1-z_2} e^{z_2} = e^{z_1-z_2+z_2} = e^{z_1}$$

فإن

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} / e^{z_2}$$

باستخدام خاصية جمع الأسس على التوالي، نحصل على $e^{nz} = (e^z)^n$. تعطي هذه الصيغة إثباتا سريعا لنظرية دوموافر (De Moivre's) وذلك بوضع $z = e^{i\theta}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

لقيم $n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$.

باستخدام هذه الصيغة لنظرية دوموافر نحصل على :

$$(1-i)^{23} = \left(\sqrt{2}e^{-\pi i/4}\right)^{23} = 2^{23/2} e^{-23\pi i/4}$$

$$= 2^{23/2} e^{\pi i/4} = 2^{11}\left(\sqrt{2}e^{\pi i/4}\right)$$

$$= 2^{11}(1+i)$$

سيكون للأس المركب دور بارز في التطبيقات. ولكي يفهم الأس المركب بتمعن، نحتاج إلى مناقشة خواصه كدالة.

لنعتبر الدالة

$$w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y),$$

لاحظ أن صورة الشريط اللانهائي $-\pi \le y < \pi$ هي $\mathbf{C} - \{0\}$ ، والنقاط على القطعة المستقيمة $x = 0$ و $-\pi < y < \pi$ تصور على شكل تقابل أحادي وصورتها

الدائرة: $|w| = 1$ ، أما المستقيمات العمودية على يسار المحور التخيلي فصورها الدوائر التي أنصاف أقطارها أقل من واحد: $r < 1$ وأما المستقيمات العمودية على يمين المحور التخيلي فصورها الدوائر التي أنصاف أقطارها أكبر من الواحد $r > 1$. النصف الأيسر من الشريط في الشكل رقم (١,٢١) صورته $0 < |w| < 1$ والنصف الأيمن صورته $|w| > 1$ لاحظ أن e^z لها طور قدرة $2\pi i$ ، لأن:

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+(2\pi+y)i} = e^x\left[\cos(2\pi + y) + i\sin(2\pi + y)\right] = e^z$$

وعليه القيمتان المركبتان e^z و $e^{z+2\pi ik}$ حيث k عدد صحيح هما متكافئتان.

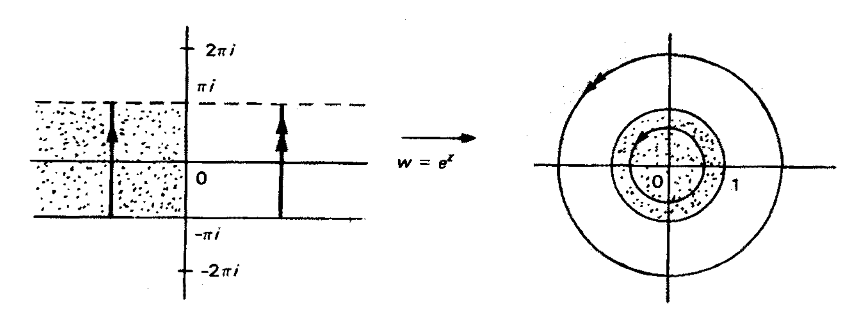
إذن، كل شريط غير محدود:

$$-\pi \le y - 2\pi k < \pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

تكون صورته $C - \{0\}$ والدالة:

$$e^z : C \to C - \{0\}$$

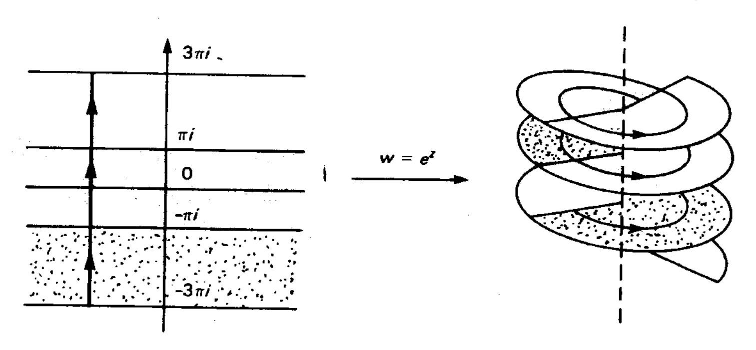
تصور عددا لا منتهيا من النقاط في C إلى نفس النقطة في $C - \{0\}$ وهذا أمر غير مرضي، حيث يمنع مناقشة الدالة العكسية إلا على كل شريط غير منتهي موصوف أعلاه.



الشكل رقم (١,٢١). الدالة الأسية.

إن معكوس دالة هو بالتأكيد شيء مهم لأن معكوس الدالة الأسية الحقيقي هو الدالة اللوغاريتمية. وللتخلص من هذه العقبة تخيل أن المدى للدالة يحتوي على عددا

لا نهائيا من صور $C-\{0\}$ منضدة على شكل طبقات الواحدة فوق الأخرى كل منها مقطوع بموازة المحور الحقيقي السالب بحيث تلتصق الحافة السفلية من الطبقة العلوية بالحافة العلوية من الطبقة السفلية مكونة مجموعة $\mathfrak{R}$ مشابهة لدرج حلزوني لا نهائي (انظر الشكل رقم ١,٢٢).



الشكل رقم (١,٢٢). سطح ريمان للدالة $w=e^z$.

تختلف المجموعة $\mathfrak{R}$ عن $C-\{0\}$ في أن كل نقطة على $\mathfrak{R}$ تحدد بشكل وحيد في الإحداثيات القطبية، بينما النقاط في $C-\{0\}$ لا يمكن تحديدها بشكل وحيد في الإحداثيات القطبية؛ لكون الزاوية (argument) متعددة القيم. باستخدام $\mathfrak{R}$ كمجال مقابل للدالة e^z، وحساب المسافات القصيرة بالطريقة الموضحة، نلاحظ أن e^z تصور C باستمرار على $\mathfrak{R}$، وأن الدالة أحادية. إذن $e^z: \mathbf{C} \to \mathfrak{R}$ لها معكوس سندرسه في القسم (١,٩).

لا تتأثر تحليلية e^z بعمل هذا التغيير في مجموعة المدى حيث:

$$\frac{e^{z+h}-e^z}{h}=e^z\left(\frac{e^h-e^0}{h}\right)$$

ويقترب المقدار داخل القوس من e^0 عندما $h \to 0$ وذلك عندما يقع e^h على نفس الطبقة من $\mathfrak{R}$ مثل e^0 على التوالي. بدلا عن ذلك، إذا كان $\operatorname{Im} z \neq (2k+1)\pi$

وكانت h صغيرة، فإن كلا من z و $z+h$ ستقع على نفس الشريط، وبالتالي فإن كلا من e^{z+h} و e^{z} تقع على نفس صورة $C-\{0\}$.

تسمى المجموعة $\Re$ سطح ريمان، وتسمى خطوط القطع على كل صورة من $C-\{0\}$ مقاطع الفرع، ونهـايتا الفرع 0 و ∞ تسميان نقطتي الفرع، وتسمى كل صورة من $C-\{0\}$ فرعا من $\Re$.

تمارين (١,٧)

في التمارين من (١) إلى (٧) ضع كل عدد على الصورة $x+iy$:

(١) $e^{i\pi}$ (٢) $e^{(1+\pi i)/2}$

(٣) $e^{-1+(\pi i/4)}$ (٤) $e^{(-1+\pi i)/4}$

(٥) $e^{3\,i\pi/2}$ (٦) $e^{-(i\pi/2)}$

(٧) $e^{z\pi i/4)}$

في التمارين من (٨) إلى (١٠) أوجد جميع الأعداد المركبة z التي تحقق الشروط المذكورة:

(٨) $e^{2z}=-1$ (٩) $e^{iz}=2$

(١٠) $e^{iz}=-1$

(١١) أوجد جميع قيم $e^{\pi k/2}=-1$ ، حيث k عدد صحيح.

(١٢) بين أن: $\overline{\left(e^{z}\right)}=e^{\bar{z}}$

في التمارين من (١٣) إلى (٢٠) أحسب قيمة كل عدد باستعمال نظرية دوموافر:

(١٣) $(1+i)^{29}$ (١٤) $(-1+i)^{17}$

(١٥) $(-1-i)^{36}$

(١٦) $(2+2i)^{12}$

(١٧) $(\sqrt{3}+i)^{15}$

(١٨) $(-\sqrt{3}+i)^{13}$

(١٩) $(1-\sqrt{3}i)^{14}$

(٢٠) $(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i)^{19}$

في التمارين من (٢١) إلى (٢٤) أوجد المجموع باستعمال نظرية دوموافر:

(٢١) $1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$

(٢٢) $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\ldots+\cos (2n-1)x$

(٢٣) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx$

(٢٤) $\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\ldots+\sin (2n-1)x$

(٢٥) إذا كان $f(z)$ كلية فأثبت أن $e^{f(z)}$ تكون كلية ، وأوجد مشقتها؟

(٢٦) أثبت أن e^z تكون الحل التحليلي الوحيد للمعادلة التفاضلية المركبة:

$$f'(z)=f(z) \text{ و } f(0)=1$$

ما صورة المجموعة $\{z : |x|<1 , |y|<1\}$ بوساطة الدوال المعطاة في التمرينين (٢٧) و(٢٨)؟

(٢٧) $w=e^{\pi z}$

(٢٨) $w=e^{\pi z/2}$

(٢٩) أوجد دالة تحليلية تصور $\{z: 0<x<1, 0\le y<1\}$ بشكل أحادي على $1<|w|<e^{z\pi}$.

(٨ ,١) الدوال المثلثية والزائدية المركبة

The Complex Trigonometric and Hyperbolic Functions

يمكن أن يستخدم الأس المركب لتعريف الدوال المثلثية المركبة حيث إن:

$e^{iy}=\cos y+i\sin y$ و $e^{-iy}=\cos y-i\sin y$ ويتبع ذلك:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

نعمم هذه التعاريف إلى المستويات المركبة كما يلي :

تعريف:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

تكون هذه الدوال كلية ؛ لأنها مجموع دوال كلية ، ويحقق :

$$(\cos z)' = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

$$(\sin z)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = -\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = -\cos z$$

تعرف الدوال المثلثية الأربع الأخرى بدلالة دوال الجيب (sine) وجيب التمام (cosine) بوساطة العلاقات المعتادة :

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

وهذه دوال تحليلية إلا إذا كان المقام مساويا للصفر ، وهي تحقق قواعد الاشتقاق التالية (انظر التمرين رقم (٢٢)) :

$$(\tan z)' = \sec^2 z, \qquad (\sec z)' = \sec z \tan z,$$

$$(\cot z)' = -\csc^2 z, \qquad (\csc z)' = -\csc z \cot z.$$

تبقى جميع العلاقات المثلثية المعتادة صحيحة في المتغيرات المركبة ، ويعتمد الإثبات على خواص الأسس. فعلى سبيل المثال :

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \tfrac{1}{4}\left[\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)^2 - \left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^2\right] = 1$$

$$\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$
$$= \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i}$$
$$= \frac{2e^{iz_1}e^{iz_2} + 2e^{-iz_1}e^{-iz_2}}{4} = \cos(z_1 + z_2)$$

نحصل من تعريف $\cos z$ على:

$$\cos z = \cos(x+iy) = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i\sin x) + \tfrac{1}{2}e^{y}(\cos x - i\sin x)$$
$$= \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right)\cos x - i\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)\sin x.$$

إذن:

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

ونجد بالمثل أن:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

نظرية

الأصفار الحقيقية (الجذور الحقيقية) لـ $\sin z$ و $\cos z$ هي فقط أصفارهما.

البرهان

إذا كان $\sin z = 0$ ، فتبين المعادلة الأخيرة أنه يجب أن يكون:

$$\sin x \cosh y = 0, \qquad \cos x \sinh y = 0$$

ولكن $\cosh y \neq 0$ إذن يساوي الحد الأيسر الصفر فقط عندما يكون $\sin x = 0$ أي عندما يكون $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ ، على كل حال لهذه القيم $\cos x$ لا يساوي الصفر، إذن $\sinh y = 0$ أو $y = 0$.

إذن حلول $\sin z = 0$ هي $z = n\pi$ حيث n عدد صحيح.

تطبق هذه العلاقة أيضا على $\tan z$ ، وبنفس الطريقة نجد أن:

$\cos z = 0$ يعطي $z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ حيث n عدد صحيح. ■

تعرف الدوال الزائدية المركبة بتعميم التعريفات الحقيقية إلى المستوى المركب.

تعريف

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

مرة أخرى، تطبق جميع العلاقات المعتادة وقواعد الاشتقاق على الدوا ل الزائدية المركبة (انظر التمارين (٢٣-٣٠) نلاحظ مع هذا:

$$\sinh iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \sin z$$

$$\cosh iz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

إلى هذا المستوى تستنبط الدوال الزائدية من الدوال المثلثية المركبة، فالضرب في i ببساطة يدير كل متجه في C في اتجاه معاكس لاتجاه عقارب الساعة بزاوية مقدارها $90°$، إذن، أصفار $\sinh z$ و $\cosh z$ تكون تخيلية بحتة.

تمارين (١,٨)

في المسائل من (١) إلى (٨) عبر عن كل عدد على الصورة: $x + iy$

(١) $\sin i$ (٢) $\cos(-i)$

(٣) $\cosh(1+i)$ (٤) $\sinh \pi i$

(٥) $\cos(1+i)$ (٦) $\tan 2i$

(٧) $\sinh(1+\pi i)$ (٨) $\cosh(\pi i/4)$

في التمارين من (٩) إلى (١٢) أوجد جميع الأعداد المركبة z التي تحقق الشروط المعطاة:

(٩) $\cos z = \sin z$ (١٠) $\cos z = -i\sin z$

(١١) $\cosh z = 2$ (١٢) $\cosh z = i$

(١٣) هل يوجد عدد z يحقق: $\sinh z = \cosh z$؟

(١٤) أثبت أن $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$

(١٥) أثبت أن $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$

في التمارين من (١٦) إلى (٢١) أثبت كلا مما يلي:

(١٦) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$

(١٧) $\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2$

(١٨) $\cos(-z) = \cos z$ ، $\sin(-z) = -\sin z,$

(١٩) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z,$ ، $\sin 2z = 2\sin z \cos z,$

$$\tan 2z = \frac{2\tan z}{1-\tan^2 z}$$

(٢٠) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

(٢١) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$

(٢٢) أثبت أن قواعد التفاضل للدوال: $\tan z, \cot z, \sec z,$ و $\csc z$ صحيحة كما هو مذكور.

في التمارين من (٢٣) إلى (٢٧) أثبت كلا مما يلي:

(٢٣) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \cosh(-z) = \cosh z, \sinh(-z) = -\sinh z$

(٢٤) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$

(٢٥) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$

(٢٦) $i \tanh z = \tan iz \qquad \cosh z = \cos iz, \qquad i \sinh z = \sin iz,$

(٢٧) $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y, |\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$

أثبت أن قواعد التفاضل المعطاة في التمارين من (٢٨) إلى (٣٠):

(٢٨) $(\cosh z)' = \sinh z \qquad (\sinh z)' = \cosh z,$

(٢٩) $(\coth z)' = -\text{csch}^2 z \qquad (\tanh z)' = \text{cech}^2 z,$

(٣٠) $(\text{csch } z)' = -\text{csch } z \coth z \qquad (\text{sech } z)' = -\text{sech } z \tanh z,$

(٣١) أوجد جميع أصفار $\sinh z$ و $\cosh z$

(٣٢) تحقق من أن: $e^z = \cosh z + \sinh z$

(٣٣) تحقق من أن: $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

بين أن الدالة $w = \sin z$ تصور كل شريط في التمارين من (٣٤) إلى (٣٦) إلى المجموعات المعطاة بذكر ما ذا يحدث للقطع المستقيمة الأفقية والرأسية تحت التحويل:

$$w = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

(٣٤) الشريط $|x| < \pi/2$ إلى $\boldsymbol{C} - \{z : y = 0, |x| \geq 1\}$.

(٣٥) الشريط اللانهائي $y > 0$ و $|x| < \pi/2$ إلى النصف العلوي للمستوى.

(٣٦) الشريط شبه اللانهائي $y > 0$ و $0 < x < \pi/2$ إلى الربع الأول.

(٣٧) صف الدالة $w = \cos z$ بمعرفة صورة كل من الخط الرأسي والأفقي تحت تأثير التحويل:

$$w = \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

(٩ , ١) اللوغاريتم المركب ودوال القوى المركبة

The Complex Logarithm and Complex Power Functions

بما أن الدالة $e^z : C \to \Re$ أحادية ، حيث $\Re$ سطح ريمان المعرف في القسم (١,٧)، فإنه يمكن تعريف معكوسها من $\Re$ إلى C بنفس الطريقة التي عرفت بها الحالة الحقيقية. ونسمي هذه الدالة العكسية اللوغاريتمية ونرمز لها بالرمز:

$$\log z : \Re \to C$$

بما أن الأس المركب واللوغاريتم الواحد معكوس للآخر ينتج:

$$\log e^z = z, \qquad \text{لكل } z \text{ من } C$$

$$e^{\log z} = z, \qquad \text{لكل } z \text{ من } \Re$$

المهمة الوحيدة المتبقية هي الحصول على صيغة للمقدار $\log z$ بدلالة بعض الدوال المعروفة وتقف في طريقنا صعوبات إحداها أن اللوغاريتم معرف على سطح ريمان الموضح في الشكل (١,٢٢). وبما أن $\Re$ يحتوي على عدد لانهائي من صور $C - \{0\}$ منضدة لتكون درجا حلزونيا ، فإنه يجب علينا العثور على طريقة لتعريف النقاط على كل فرع من فروع سطح ريمان.

عند هذه النقطة تصبح الصعوبة السابقة شيئا نافعا. بالرغم من أن الزاوية $\arg z$ لها قيم متعددة $C - \{0\}$ إلا أن لها قيمة واحدة هي $\Re$. وبالتالي يمكننا التمييز بين فروع مختلفة لـ $\Re$ باستخدام التمثيل القطبي: $z = |z|e^{i\arg z}$ لكل z في $\Re$. التمثيل القطبي وطبيعة معكوس الدوال اللوغاريتمية والدوال الأسية يعطي تعريفا طبيعيا للوغاريتم المركب:

$$\log z = \log(|z|e^{i\arg z}) = \log(e^{\log|z| + i\arg z})$$

$$= \log|z| + i\arg z,$$

حيث $\log|z|$ اللوغاريتم الطبيعي كما في مبادئ التفاضل والتكامل.

لإكمال وصف سطح ريمان $\Re$ ، نعرف الجوار $-\varepsilon$ للنقاط في $\Re$ إذا كـانت z تقع على فرع من فروع $\Re$ حيث $|z| > \varepsilon$ ، فإن مجموعة النقاط على ذلك الفرع التي بعدها عن z أقل من ε تكون الجـوار $-\varepsilon$ للنقطة z هـذا المفهوم مهم لأن النـهايات تعـرف بدلالـة جـوارات $-\varepsilon$. بتعريف جوار $-\varepsilon$ على سـطح ريمـان، نعمـم تعريـف الاتصال والاشتقاق والتحليلية للـدوال المعرفـة علـى سـطح ريمـان، حيـث يعتمـد التعريف على سلوك الدالة محليا ليس إلا ؛ فالاتصال عند z يعتمد فقـط علـى الفـرق $f(z)-f(w)$ لأي نقطة w في أي جوار $-\varepsilon$ للنقطـة z ، بينمـا الاشتقــاق عنـد z يعتمد فقط على النسبة :

$$[f(z)-f(w)]/(z-w)$$

باستخدام هذه المفاهيم يسهل التحقق من أن $\log z$ متصلة حيث إن :

$$\begin{aligned}\log z-\log w &= \log|z|+i\arg z-\log|w|-i\arg w\\ &= [\log|z|-\log|w|]+i[\arg z-\arg w]\end{aligned}$$

ذلك لأن اللوغاريتم الطبيعي والدالة $\arg$ دالتان متصلتان.

نظرية

الدالة : $\log z=\log|z|+i\arg z$ تحليلية لجميع النقاط z من $\Re$.

البرهان

بما أن :

$$u=\log|z|=\tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2),\ v=\arg z=\tan^{-1}(y/x)+\pi n$$

فإن :

$$u_x=\frac{x}{x^2+y^2},u_y=\frac{y}{x^2+y^2},v_x=\frac{-y}{x^2+y^2},v_y=\frac{x}{x^2+y^2}$$

فمعادلتي كوشي محققة، والمشتقات الجزئية متصلة في $\Re$، لأن التحليلية خاصية محلية، وبرهان النظرية للشروط الكافية للتحليلية في القسم (١,٦) يعتمد على تحليل محلي، لذا فإن $\log z$ تحليلية في $\Re$. ■

اللوغاريتم المركب له الخواص المعتادة للّوغاريتم:

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2,$$

$$\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2,$$

لاحظ أننا افترضنا في هاتين المتساويتين أن z_1 و z_2 نقطتان من نقاط سطح ريمان $\Re$. حيث $z = e^{\log z}$ لأي نقطة z من $\Re$ وبتطبيق قاعدة السلسة للتفاضل نحصل على:

$$1 = e^{\log z}(\log z)'$$

أو

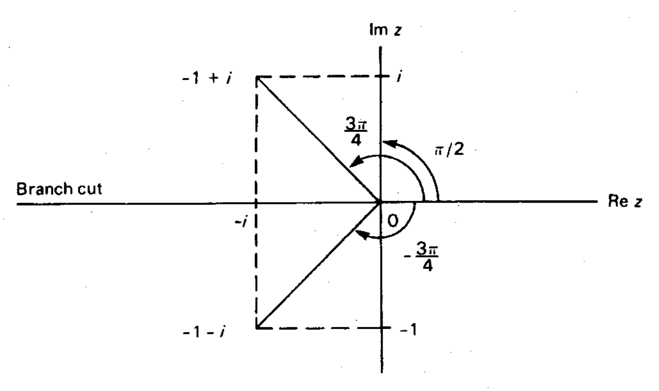
$$(\log z)' = 1/z, \quad z \in \Re$$

وعليه تكون صيغ التفاضل العادية صحيحة على $\Re$.

كما هو موضح في تعريف القيمة الرئيسية $\operatorname{Arg} z$ للزاوية $\arg z$ نستطيع أن نعمم هذا المفهوم إلى اللوغاريتم باعتبار اللوغاريتم دالة عكسية للدالة الأسية، نسمى فرع $\Re$ المأخوذ على طول الجزء السالب من المحور الحقيقي- الذي هو صورة من الشريط غير المنتهي $-\pi \le y < \pi$ - بالفرع الرئيسي للوغاريتم (انظر الشكل رقم ١,٢٣) ونرمز للمقدار $\log z$ عندما تكون مأخوذة على الفرع الرئيسي بالرمز:

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z$$

ويسمى هذا المقدار بالقيمة الرئيسية (principal value) إلى $\log z$.



الشكل رقم (١,٢٣). الفرع الرئيسي إلى $\Re$.

لاحظ أن القيمة الرئيسية $\operatorname{Log} z$ معرفة فقط على الفرع من $\Re$ حيث $\operatorname{Arg} z$ موجودة. يجب أخذ الحيطة عند العمل مع الفرع الرئيسي إلى اللوغاريتم $\operatorname{Log}\ z$، فالخواص العادية للوغاريتم قد لا يمكن تطبيقها. فعلى سبيل المثال:

$$\operatorname{Log} i = \log|i| + i\operatorname{Arg} i = i\pi/2,$$

$$\operatorname{Log}(-1+i) = \log|-1+i| + i\operatorname{Arg}(-1+i)$$

$$= \log\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}$$

ولكن:

$$\operatorname{Log}[i(-1+i)] = \operatorname{Log}(-1-i)$$

$$= \log|-1-i| + i\operatorname{Arg}(-1-i)$$

$$= \log\sqrt{2} - i\frac{3\pi}{4}$$

وعليه:

$$\operatorname{Log}[i(-1+i)] \neq \operatorname{Log} i + \operatorname{Log}(-1+i)$$

وعوضا عن ذلك، فإن التعبيرين يختلفان بمضاعفات $2\pi i$ (لماذا؟)

يمكن استخدام الدوال اللوغاريتمية والأسية المركبة لتعريف دوال القوى.

تعريف

$z^a = e^{a\log z}$ ، حيث a عدد مركب ≠ الصفر ، $z \neq 0$.

الدالة $z^a : \Re \to \Re$ تحليلية وأحادية حيث إنها تحصيل دالتين لهما هذه الصفات. وباستخدام قاعدة السلسلة نجد أن :

$$(z^a)' = e^{a\log z} \cdot \frac{a}{z} = az^{a-1}$$

تعطى القيمة الرئيسية لدالة القوى بالصيغة :

$$z^a = e^{a \text{ Log} z}$$

في أغلب الأحيان ، نرغب في دراسة الحالة حيث $a = m/n > 0$ حيث m و n أعداد صحيحة موجبة لا يوجد بينها عامل مشترك. اعتبر مجموعة الأعداد :

$$e^{\text{Log}(z)+2\pi ki}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

أي تلك النقاط في $\Re$ التي تكون واقعة مباشرة أعلى أو اسفل النقطة $e^{\log z}$ إذن :

$$\left(e^{\text{Log}(z)+2\pi ki}\right)^{m/n} = e^{(m/n)\text{Log } z} e^{(m/n)2\pi ki}$$

بكتابة $k = pn + q$ حيث p و q أعدادا صحيحة ، $0 \le q < n$ ، نجد أن :

$$e^{(m/n)2\pi ki} = e^{2\pi pmi} . e^{2\pi iqm/n} = e^{2\pi iqm/n},$$

وعليه فمن هذه القيم المركبة هناك n فقط من الإجابات المختلفة.

لهذا ، تصور الدالة $z^{m/n} : \Re \to \Re$ كل n صورة من $C - \{0\}$ إلى صورة واحدة من $C - \{0\}$ ويتكرر الأمر نفسه بعد ذلك.

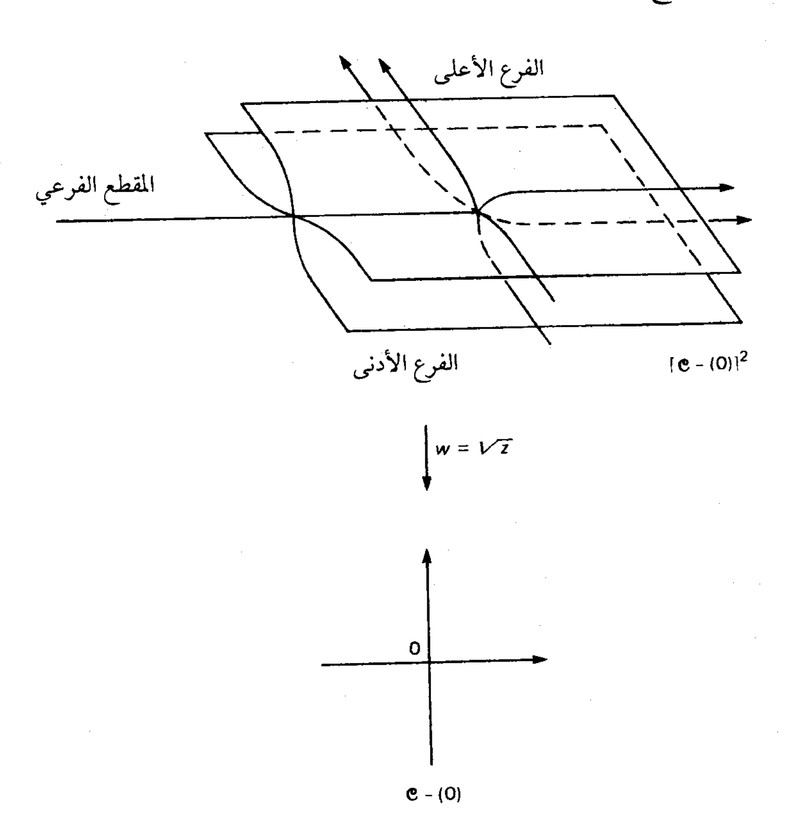
بعد هذه الحقيقة ، من الممكن تبسيط الطريقة المستخدمة في وصف الدالة $w = z^{m/n}$. وللتبسيط نفرض أن $m = 1$ وبالتالي فإن :

$$w = z^{1/n} = e^{(1/n)\text{Log} z} . e^{2\pi iq/n} \qquad q = 0, 1, \ldots, n-1,$$

يمكن تصورها على أنها تأخذ $[C-\{0\}]^n$ إلى $[C-\{0\}]$ ، حيث $[C-\{0\}]^n$ تحتوي على n صورة من $[C-\{0\}]$ ملصقة واحدة بعد الأخرى على طول المحور الحقيقي السالب كما في $\Re$ ماعدا الحافة العلوية للفرع العلوي ؛ فهي ملصقة بالحافة السفلية للفرع السفلي.

مثال (١,٩)

صف سطح ريمان المعدل للدالة $w=\sqrt{z}$



الشكل رقم (١,٢٤). سطح ريمان للدالة $w=z^{1/2}$

الحل

من المناقشة أعلاه، تصور الدالة من $[C-\{0\}]^2$ إلى $[C-\{0\}]$ كما هو موضح بالشكل (١,٢٤). يمكن أن نتصور الفرع العلوي كأنه صور على المستوى الأيمن والفرع السفلي صور على المستوى الأيسر.

الدالة $z^m = [C-\{0\}] \to [C-\{0\}]^m$ هي الدالة العكسية للدالة $z^{\frac{1}{m}}$، وبالتالي فإن دالة التحصيل:

$$\left(z^{1/n}\right)^m = z^{m/n} : [C-\{0\}]^n \to [C-\{0\}]^m$$

هي تحليلية وأحادية على سطح ريمان المعدل الموضح أعلاه.

يمكن أن يستخدم اللوغاريتم، أيضا، لتعريف الدوال المثلثية العكسية.

مثال (١,٩,٢)

أثبت أن:

$$\sin^{-1} z = -i \log\left[iz + \left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

الحل

الدالة $w = \sin^{-1} z$ هي الدالة العكسية للدالة:

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

بضرب طرفي هذه المعادلة في $2ie^{iw}$ نجد أن:

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

وبحل هذه المعادلة من الدرجة الثانية بالنسبة للمقدار e^{iw} نجد أن:

$$e^{iw} = iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}}$$

حيث الجذر التربيعي يصور $[C-\{0\}]^2$ على $[C-\{0\}]$ (أو ثنائية القيمة) ونحصل على النتيجة المطلوبة بأخذ اللوغاريتم لكل من الطرفين في المساواة السابقة.

يمكن للمتطابقات العادية وقواعد الاشتقاق للدوال المثلثية العكسية والدوال الزائدية أن تطبق هنا أيضا. ومن الحقائق الثابتة إن في أغلب الدوال الرياضية التي تظهر في المسائل الفيزيائية والهندسية تكون تحليلية. وعليه إن مفهوم التحليلية يطبق على مجموعة كبيرة ومفيدة من الدوال.

تمارين (١,٩)

في المسائل من (١) إلى (٦) أوجد القيم للمقادير المعطاة:

(١) $\log i$ (٢) $\log(1+i)$

(٣) $\log(-1)$ (٤) 1^i

(٥) i^i (٦) $(1+i)^{1+i}$

في المسائل من (٧) إلى (١٠) أوجد القيم الرئيسية للمقادير المعطاة:

(٧) $\log i$ (٨) $\log(1+i)$

(٩) i^i (١٠) $(1+i)^{1+i}$

(١١) لأي القيم للعدد المركب a يمكن أن نمد الدالة z^a حتى تصبح متصلة عند $z=0$ ؟ ومتى تكون هذه الدالة كلية؟

(١٢) أثبت أن $\log z$ هي الدالة التحليلية الوحيدة التي تكون حلا للمعادلة التفاضلية:

$$f'(z)=\frac{1}{z}, \qquad f(1)=0,$$

في القرص $|z-1|<1$.

(١٣) أثبت أن: $\log z_1+\log z_2=\log z_1 z_2$

(١٤) أثبت أن : $\log z_1 - \log z_2 = \log \frac{z_1}{z_2}$

(١٥) اثبت أن : $z^a z^b = z^{a+b}$

(١٦)أثبت أن : $\frac{z^a}{z^b} = z^{a-b}$

(١٧) أثبت أن : $\text{Log}(-1-i) - \text{Log}\, i \neq \text{Log}\left(\frac{-1-i}{i}\right)$

(١٨) أثبت أن : $\text{Log}(i^3) \neq 3\text{Log}\ i$

(١٩) أثبت أن : $\log z^a = a \log z$ ، a عدد مركب ≠ الصفر، $z \neq 0$.

(٢٠) هل 1 مرفوع لأي قوة يساوي واحدا دائما؟

(٢١) أثبت أن : $\cos^{-1} z = -i \log\left[z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right]$

(٢٢) أثبت أن : $\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log\left(\frac{i+z}{i-z}\right), z \neq \pm i$

(٢٣) أثبت أن : $\cot^{-1} z = \frac{i}{2} \log\left(\frac{z-i}{z+i}\right), z \neq \pm i,$

(٢٤) أثبت أن : $\sinh^{-1} z = \log\left[z + (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\right]$

(٢٥) أثبت أن : $\cosh^{-1} z = \log\left[z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right]$

(٢٦) أثبت أن : $\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right), z \neq \pm 1$

(٢٧) أثبت أن : $(\sin^{-1} z)' = (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}, z \neq \pm 1$

(٢٨) أثبت أن : $(\cos^{-1} z)' = -(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}, z \neq \pm 1$

(٢٩) أثبت أن : $(\tan^{-1} z)' = \frac{1}{1+z^2}, z \neq \pm 1$

(٣٠) أثبت أن : $(\sinh^{-1} z)' = (1 + z^2)^{-\frac{1}{2}}, z \neq \pm 1$

(٣١) أثبت أن: $\left(\cosh^{-1} z\right)' = \left(z^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}}, z \neq \pm 1$

(٣٢) أثبت أن: $\left(\tanh^{-1} z\right)' = \dfrac{1}{1-z^2}, z \neq \pm 1$

(٣٣) أوجد الخطأ في التعبير التالي:

$$i = (-1)^{\frac{1}{2}} = \left[(-1)^3\right]^{\frac{1}{2}} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i$$

(١٠ , ١) تطبيقات في علم الضوء (اختياري)

Applications in Optics (Optional)

أحد النماذج التي افترضت في تفسير الظواهر للضوء، يفترض أن مصدر الضوء، يكون اضطرابا منتجا موجات دائرية في محيط متجانس، ويكون هذا النموذج متطابقا مع الدوائر المتوسعة التي تنتج من اضطراب سطح الماء. ويؤدي التحليل الرياض لهذا النموذج باستخدام معادلات جيمس ماكسويل (James Maxwell) في الكهرومغناطيسية إلى المعادلة الموجية ذات البعد الواحد:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

حيث E الاضطراب الضوئي، x النمو الاتجاهي للموجه، c سرعة النمو للضوء و t الزمن (انظر إلى التمرين رقم ٤). من السهل إثبات أن أي دالة من الشكل $E = f(ct - x)$ تكون حلا للمعادلة الموجية إذ:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-f'(ct-x)\right] = f''(ct-x)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[cf'(ct-x)\right] = c^2 f''(ct-x)$$

إن ملاحظة أثر التداخل الذي يحصل عندما يصل شعاعان من الضوء منبعثين من مصدر ضوئي واحد، إلى نقطة واحدة من خلال مسارين مختلفين، يوحي بأن

الاضطراب الضوئي يتكون من مجموع عدة دوال قريبة من الدوال الجيبية ؛ أي بالإمكان تمثيل E تقريبا بوساطة مجموعة موجات جيبية من الشكل :

$$A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\phi\right]$$

حيث تمثل A السعة ، $\omega/2\pi$ التردد $\alpha=\phi-\omega x/c$ فرق الطور للموجه.

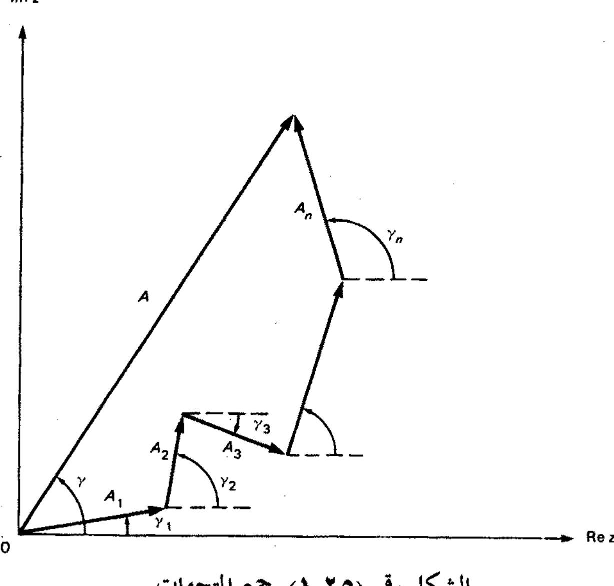
من السهولة إضافة موجات جيبية لها نفس التردد باستخدام الأس المركب :

$$\begin{aligned}
&A_1\cos(\omega t+\alpha_1)+\ldots+A_n\cos(\omega t+\alpha_n)\\
&=\mathrm{Re}\left[A_1e^{i(\omega t+\alpha_1)}+\ldots+A_ne^{i(\omega t+\alpha_n)}\right]\\
&=\mathrm{Re}\,Ae^{i(\omega t+\alpha)}=A\cos(\omega t+\alpha)
\end{aligned}$$

عندئذ نحصل على :

$$A_1e^{i\alpha_1}+\ldots+A_ne^{i\alpha_n}=Ae^{i\alpha}$$

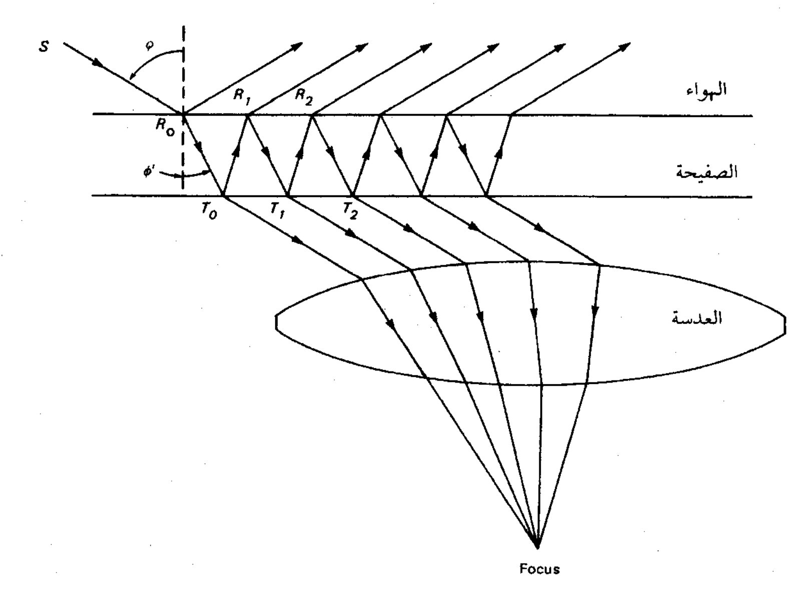
بيانيا باستخدام قاعدة متوازي الأضلاع لجمع المتجهات. [انظر الشكل (١,٢٥)].



الشكل رقم (١,٢٥). جمع المتجهات.

تتأثر صورة التلسكوب بتداخل الهدب الذي يحدث عندما ينفذ شعاع الضوء المحول والمعكوس عن سطح الصفائح الزجاجية والفراغ المملوء بالهواء في التلسكوب.

اعتبر الشكل رقم (١,٢٦) حيث يصدر شعاع من الضوء عن مصدر بعيد نسبيا s يصل صفيحة من الزجاج عند R_0. فينعكس جزء من الشعاع الساقط على الصفيحة ، بينما يمر الجزء الباقي من خلال الصفيحة. عند T_0 ينعكس جزء إلى R_1 وجزء يمر ويركز بوساطة عدسة. وعند الوصول إلى R_1 ينعكس جزء من الشعاع إلى T_1 ويمر الجزء الباقي وهكذا.



الشكل رقم (١,٢٦). التداخل المتعدد للموجه.

لنفرض أن $r(s)$ هي النسبة بين الأشعة المنعكسة (الداخلة) إلى سعة الأشعة الساقطة ، ونفترض أن سعة بداية الشعاع الساقط هي A فإن الاضطراب الضوئي عند T_0 يعطى بالصيغة :

$$E_{T_0} = s^2 A \operatorname{Re} e^{i\omega t}$$

والسبب أن الشعاع قد نقل خلال سطحين، بينما يُعطى الاضطراب الضوئي عند T_1 بالصورة:

$$E_{T_1} = s^2 r^2 A \operatorname{Re} e^{i(\omega t-\alpha)}$$

حيث α فرق الضوء الإزاحي الذي يحدث عندما تعبر الأشعة المسافة الإضافية خلال انعكاسين عند T_0 و R_1 (انظر تمرين ٢).

بالمثل:

$$E_{T_2} = s^2 r^4 A \operatorname{Re} e^{i(\omega t-2\alpha)}$$

و

$$E_{T_n} = s^2 r^{2n} A \operatorname{Re} e^{i(\omega t-n\alpha)}$$

لحساب الاضطراب الضوئي المحصل، نضيف جميع هذه الاضطرابات إلى بعضها فنجد أن:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} E_{T_n} = s^2 A \operatorname{Re}\left[e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(r^2 e^{-i\alpha}\right)^n \right]$$

$$= s^2 A \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\omega t}}{1 - r2e^{-i\alpha}} \right)$$

وتنتج المساواة الأخيرة بملاحظة أن المتسلسلة الهندسية:

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

تحقق

$$(1-z)G = 1 \text{ أو } zG = G - 1$$

سيقال أكثر من هذا عن هذه المتسلسلة في الفصل الثالث، ولكن:

$$\frac{e^{i\omega t}}{1 - r^2 e^{-i\alpha}} = \frac{e^{i\omega t}}{1 - r^2 e^{-i\alpha}} \cdot \frac{1 - r^2 e^{i\alpha}}{1 - r^2 e^{i\alpha}}$$

$$=\frac{e^{i\omega t}\left(1-r^2e^{i\alpha}\right)}{1+r^4-2r^2\cos\alpha}$$

وبالتالي

$$E=\frac{s^2A}{1+r^4-r^2\cos\alpha}\cdot\text{Re}\left[e^{it\omega}-r^2e^{i(\omega t+\alpha)}\right]$$
$$=\frac{s^2A\left[\cos\omega t-r^2\cos(\omega t+\alpha)\right]}{1+r^4-2r^2\cos\alpha}$$
$$=\frac{s^2A\left[\left(1-r^2\cos\alpha\right)\cos\omega t+\left(r^2\sin\alpha\right)\sin\omega t\right]}{1+r^4-2r^2\cos\alpha}$$

حيث :

$$\left(1-r^2\cos\alpha\right)^2+\left(r^2\sin\alpha\right)^2=1+r^4-2r^2\cos\alpha,$$

بوضع

$$\cos\beta=\frac{1-r^2\cos\alpha}{\sqrt{1+r^4-2r^2\cos\alpha}}$$

نجد أن الاضطراب الضوئي المنقول :

$$E=\frac{s^2A\cos(\omega t-\beta)}{\sqrt{1+r^4-2r^2\cos\alpha}}$$

يؤدي قانون حفظ الطاقة إلى أن $s+r=1$ وأن :

$$E=\frac{(1-r^2)A}{\sqrt{1+r^4-2r^2\cos\alpha}}\cdot\cos(\omega t-\beta)$$

تعتمد زاوية الطور α على طول المسار الذي يسلكه الضوء خلال الانعكاس عند T_0 و R_1 (انظر تمرين ٢). حيث $\omega=2\pi c/\lambda$ وحيث طول الموجه λ هو المسافة بين قيمتين عظيمتين متتاليتين للموجة ، بالتالي نجد أن :

$$\alpha=\frac{2\pi\left(l_2-l_1\right)}{\lambda}$$

إذا كـــان العدد α من المضاعفــات الصحيحــة إلى 2π ، فإن سعة الاضطـراب الضوئي هي :

$$\frac{(1-r)^2 A}{\sqrt{(1-r^2)^2}} = \frac{1-r}{1+r} A$$

بينما تعطي المضاعفات الفردية إلى π سعة تساوي :

$$\frac{(1-r)^2 A}{\sqrt{(1+r^2)^2}} = \frac{(1-r)^2}{1+r^2} A.$$

وهو تغير صغير في زاوية السقوط ϕ في شكل (١,٢٦) يمكن أن ينتج عنـه تغير كبير في زاويـة الطور α. وبالتالي ، فإن أشعة الضوء المجاورة التي لها نفس سعة السقوط سوف تنتـج صـورا بسعات مختلفة. وإذا كانت r قريبة من 1 (انعكاس كبير) يكون التغير في السعة :

$$\frac{\frac{1-r}{1+r} A}{\frac{(1-r)^2}{1+r^2} A} = \frac{1+r^2}{1-r^2}$$

كبيرا ويعطي صورة مكونة من خطوط لامعة ضيقة على لوحة قاتمة خلفية.

هذا التأثير الذي يشبه الهالة (halolike) يسـمى التداخـل الهدبـي أمـا إذا كـانت r قريبة من الصفر (انعكاس صغـير) فإن التغـير في السعة يكـون صغـيرا ويكـون التداخـل الهدبي واسعا وباهتا.

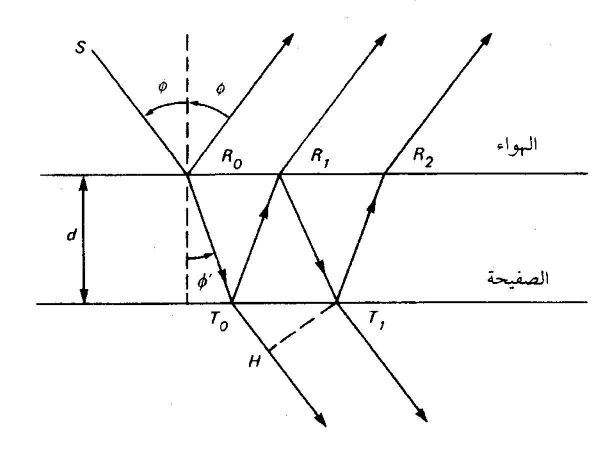
تمارين (١٠ ,١)

(١) أثبت أن الاضطراب الضوئي المنعكس في الشكل رقم (١,٢٦) أيضا يكـون مـن الشكل :

$$E = A^* \cos(\omega t - \gamma)$$

أوجد A^* و γ.

(٢) تأمل الشكل (١,٢٧). لنفترض أن ℓ_1 المسافة بين المصدر S إلى H و ℓ_2 المسافة من المصدر S إلى T_1.



الشكل رقم (١, ٢٧). قانون سنيل.

فإن قانون سنيل (Snell's law) للانعكاس يذكر أن:

$$\upsilon \sin \phi = \upsilon' \sin \phi'$$

حيث ϕ و ϕ' هما زاويتا السقوط والانعكاس على الترتيب، و υ و υ' هما معاملا الانكسار للهواء واللوحة على الترتيب. أثبت أنه إذا كان d هو سمك اللوحة فإن:

$$\ell_2 - \ell_1 = 2d\upsilon' \operatorname{coss} \phi'$$

(٣) أثبت أن: $E = f(ct + x)$ هي أيضا حل للمعادلة الموجية.

*(٤) لنفترض أن **E** و **H** هما على الترتيب الجهد الكهربائي والمغناطيسي عند أي نقطة في مجال كهرومغناطيسي. أثبت أن معادلات ماكسويل:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad , \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{E} = - \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \quad , \quad \operatorname{curl} \boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial H}{\partial t} \quad ,$$

تعطي المعادلة الموجية إذا افترضنا أن $c=1/\sqrt{\varepsilon\mu_0}$ ، **E** و**H** تعتمدان فقط على الزمن t والإحداثي x. (هذا التقريب جيد عندما يكون المصدر موضوعا بعيدا في الاتجاه x عن جوار للنقطة التي نستنتج منها المعادلة الموجية).

ملاحظات

البند (١,١)

تكون صيغ علاقة z بـ Z في الإسقاط (stereographic) سهلة الحساب: [A, pp. 18-20] أو [H, pp. 38-44].

البند (١,٥)

مرادفات أخرى لكلمة تحليلية هي: هولومورفيه (holomorphic)، مونوجينية (monogenic) ونظامية (regular).

البند (١,٦)

شروط كافية أضعف معروفة للتحليلية. تبدو أفضل نتيجة كما في [S, pp. 197-199] حيث نظرية (Loomon-Manchafi) التي تنص على: إذا كانت كل من u وv متصلتين في G، وكانت مشتقاتها الجزئية من المرتبة الأولى موجودة عند جميع نقاط G ما عدا نقاط معدودة من G وتحقق معادلتي كوشي ـ ريمان غالبا في كل مكان من G، عندئذ فإن $f = u + iv$ تحليلية في G. أمثلة أخرى تبين أن معادلتي كوشي-ريمان وحدهما غير كافيتين للتحليلية يمكن الرجوع إليها في [T, pp. 67-70].

البندين (١,٧) و(١,٩)

لمزيد من المعلومات عن سطوح ريمان انظر: [Kn, part II, pp. 100-146]. جداول لدوال أولية للمجالات يمكن الرجوع إليها في الملحق وفي [Ko]. حيث إن المشتقة لدالة عند نقطة، يمكن الحصول عليها باعتبار نسبة الفروق لنقاط متقاربة ويعمم تعريف التحليلية إلى أي سطح من سطوح ريمان.

الفصل الثاني

التكامل المركب

COMPLEX INTEGRATION

التكامل موضوع مهم ومفيد في مبادئ الحسابات (التفاضل والتكامل). وتفترض طبيعة البعد الثنائي للمستوى المركّب اعتبار التكامل على منحنيات اختيارية في C بدلا من قطع مستقيمة فقط من المحور الحقيقي. لهذه "التكاملات الخطية "خواص مشوّقة وغير عادية عندما تكون الدالة المراد تكاملها تحليلية. يعد التكامل المركب أحد أجمل وأشوق النظريات في الرياضيات.

(٢,١) التكاملات الخطية Line Integrals

جميع الخواص للدوال التحليلية التي نوقشت في الفصل السابق مستنتجة من قابلية الاشتقاق للدالة. وتفصح النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل الحقيقي عن ربط مفيد ومدهش بين الاشتقاق والتكامل المحدود.

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل Fundamental theorem of calculus

إذا كانت الدالة الحقيقية $f(x)$ متصلة على الفترة $[a,b]$ أي أن $a \le x \le b$ فإن للدالة $f(x)$ دالة أصلية على هذه الفترة. وإذا كانت $F(x)$ أي دالة أصلية للدالة $f(x)$ في الفترة $[a,b]$ أي أن $F'(x) = f(x), a \le x \le b$ فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

أحد الأهداف الرئيسية لهذا الفصل هو إثبات نظرية مشابهة للتكامل الخطي لدالة تحليلية في المستوى المركّب. يظهر من أول وهلة أن هذا عمل صعب جدا؛ لأنه يوجد عدد لا محدود من المنحنيات التي تصل بين أي نقطتين محدودتين، ولكن الإثبات يكون سهلا والتطبيقات مفيدة جدا.

القوس γ في المستوى هو مجموعة النقاط التي يمكن وضعها بالشكل الوسيطي على الصورة:

$$\gamma : x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad \alpha \le t \le \beta$$

حيث إن $x(t)$ و $y(t)$ متصلتان بالنسبة للمتغير الحقيقي t على الفترة المغلقة $[\alpha,\beta]$. ويعرف القوس γ في المستوى المركّب بوساطة دالة مركبة ومتصلة ذات متغير حقيقي:

$$\gamma : z = z(t) = x(t) + iy(t), \qquad \alpha \le \mathrm{t} \le \beta$$

يسمى القوس γ **أملسا** (smooth) إذا كانت الدالة $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ غير صفرية ومتصلة على الفقرة $\alpha \le t \le \beta$ أما القوس **الأملس جزئيا** (pws) فهو القوس الذي يحوي عددا منتهيا من الأقواس الملساء تربط البداية بالنهاية. وإذا كان γ قوسا أملس جزئيا، فإن $x(t)$ و $y(t)$ متصلتان وتكون $x'(t)$ و $y'(t)$ متصلتين جزئيا.

يسمى قوس ما **بالقوس البسيط** أو **قوس جوردان** (Jordan arc) إذا كان $z(t_1) = z(t_2)$ فقط عندما تكون $t_1 = t_2$ أي أنه لا يقطع نفسه، ويسمى منحنيا مغلقا إذا كان $z(\alpha) = z(\beta)$. **ويسمى بمنحنى جوردان** إذا كان مغلقا وبسيطا ماعدا نقطتي النهاية α و β. ويوضح الشكل (٢,١) بعض هذه المفاهيم.

مثال (٢,١,١)

ارسم الأقواس الممثلة بالأشكال الوسيطة:

(١) $\gamma : z(t) = e^{it}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$

(ب)

$$\gamma^* : z(t) = \begin{cases} 1 - i(1-t), & 0 \le t \le 1, \\ \\ 1 + t - i, & -1 \le t \le 0. \end{cases}$$

منحنى جوردان

قوس بسيط

منحنى مغلق قاطع لنفسه

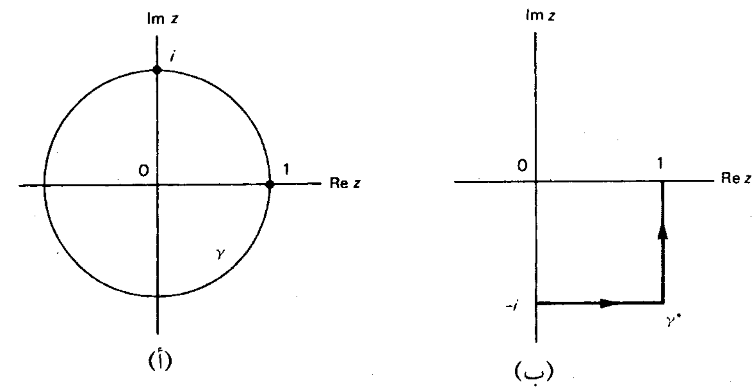
قوس قاطع لنفسه

الشكل رقم (٢,١). أقواس ومنحنيات.

الحل

(١) حيث $0 \neq (e^{it})' = ie^{it}$ فإن القوس γ أملس (لاحظ أن $|e^{it}| = 1$ وأن $e^{0} = e^{2\pi i} = 1$). إذن، γ يمثل دائرة الوحدة في اتجاه مخالف لاتجاه عقارب الساعة. من الواضح أن γ منحنى جوردان (انظر الشكل رقم ١٢,٢).

(ب) القوس γ^* غير أملس لأن $z'(t)$ غير معرفة عند $t = 0$. على كل حال $z(t)$ قوس أملس على كل من الفترات $[-1,0]$ و $[0,1]$، وبالتالي فإن γ^* قوس أملس جزئيا. نرى في الشكل رقم (٢,٢ب) أن γ^* قوس بسيط.



الشكل رقم (٢,٢). دائرة الوحدة، قوس أملس جزئياً γ^*.

تحقق منحنيات جوردان الخاصية التالية :

نظرية منحنى جوردان (Jordan curve theorem)

يفصل منحنى جوردان المستوى الممتد إلى منطقتين بسيطتا الترابط يشترط أن يكوّن المنحنى حدودا لكل منهما. تسمى المنطقة التي تحوي نقطة اللانهاية خارج المنحنى ، وتسمى المنطقة الأخرى داخل المنحنى. بالرغم من أن هذه النظرية تبدو يسيرة ، إلا أن إثباتها صعب ؛ ولهذا نقبل بصحتها من غير إثبات. ولمنحنى جوردان اتجاه موجب إذا كان داخله يقع على يسار المنحنى كلما سرنا على المنحنى.

فعلى سبيل المثال التمثيل الوسيطي :

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$$

يمثل وسيطيا $|z| = 1$ في الاتجاه الموجب ، بينما $z(t) = e^{-it}, 0 \le t \le 2\pi$ لا يمثل $|z| = 1$ في الاتجاه الموجب.

لنفترض أن γ قوس أملس في C ، ولنفترض أن الدالة المركبة $f(z)$ دالة متصلة على γ. حينئذ نستخدم التمثيل الوسيطي للقوس γ لتعريف التكامل الخطي

للدالة f على γ بدلالة تكاملين حقيقيين. فإذا أمكن حساب هذين التكاملين، فإن قيمة مجموعهما يسمى التكاملين الخطي.

تعريف

لنفترض أن $\gamma : z = z(t), \alpha \le t \le \beta$ قوس أملس، وأن $f(z) = u + iv$ دالة متصلة على γ عندئذ يعطى التكامل الخطي للدالة f على γ بالصيغة الآتية:

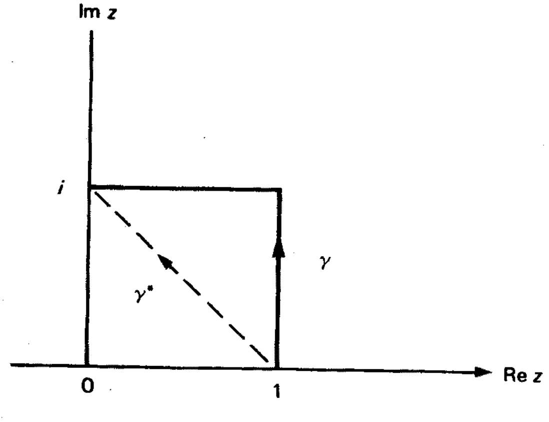
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt.$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[u(z(t)) + iv(z(t))\right]\left[x'(t) + iy^-(t)\right]dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[u(z(t))x'(t) - v(z(t))y'(t)\right]dt.$$

$$+ i\int_\alpha^\beta \left[u(z(t))y'(t) + v(z(t))x'(t)\right]dt.$$

ونحصل على التكامل الخطي على قوس γ ذي تجزيئات ملساء بتطبيق التعريف الأعلى على عدد محدود من الفترات المغلقة حيث $z(t)$ يكون أملسا فيها ثم تجمع النتائج. إذا كنت غير ملم بالتكامل الخطى، فمن المفيد قراءة الملحق (١-٣).



الشكل رقم (٢,٣). منحنى أملس جزئيا.

مثال(٢,١,٢)

لحساب $\int_\gamma xdz$ على القوس γ الأملس جزئيا المشار إليه في الشكل (٢,٣) بالصورة الوسيطة :

$$\gamma : z(t) = \begin{cases} 1+it & ,0 \le t \le 1, \\ (2-t)+i & ,1 \le t \le 2. \end{cases}$$

فإن

$$z'(t) = \begin{cases} i & ,0 \le t \le 1, \\ -1 & ,1 \le t \le 2, \end{cases}$$

مع عدم تساوي الاشتقاق من اليمين واليسار عند $t = 1$.من تعريف التكامل على كل من الفترات $0 \le t \le 1$ و $1 \le t \le 2$ نحصل على :

$$\int_\gamma xdz = \int_0^1 idt + \int_1^2 (2-t)(-1)dt = -\tfrac{1}{2} + i,$$

حيث $x(t) = 1$ على $0 \le t \le 1$ و $x(t) = 2-t$ على $1 \le t \le 2$.

إذا اخترنا تمثيلا آخر للقوس γ على سبيل المثال :

$$\gamma : z(t) = \begin{cases} 1 + i\log t, & 1 \le t \le e \\ 2 - \dfrac{t}{e} + i, & e \le t \le 2e \end{cases}$$

فإن :

$$z'(t) = \begin{cases} i/t & ,1 \le t \le e \\ -1/e & ,e \le t \le 2e \end{cases}$$

وأن :

$$\int_\gamma xdz = \int_1^e \frac{i}{t}dt + \int_e^{2e} \left(2 - \frac{t}{e}\right)\left(\frac{-1}{e}\right)dt = -\tfrac{1}{2} + i,$$

يتضح من هذا أن التكامل الخطي مستقل من التمثيلين للقوس γ ، وهذا هو الحال دائما عندما يكون تغيير الوسطاء قابلا للتفاضل قطعيا ، كما يرى ذلك بسهولة باستخدام

التحويل في صورة المتغير في حساب التفاضل والتكامل.

نحصل على قيمة أخرى للتكامل وذلك إذا كاملنا على القطعة المستقيمة γ^* التي تصل من 1 إلى i. هنا:

$$\gamma^* : z(t) = (1-t) + it, 0 \le t \le 1,$$

وعليه:

$$\int_{\gamma^*} x dz = \int_0^1 (1-t)(-1+i) dt = \frac{-1+i}{2}$$

يبين هذا المثال أنه ليس بالإمكان الحصول على نظرية مشابهة للنظرية الأساسية للتفاضل والتكامل لجميع الدوال المركبة المتصلة $f(z)$. افترض بدلا من ذلك أننا اعتبرنا فقط هذه الدالة المتصلة $f(z)$ التي هي مشتقة لدالة تحليلية $F = U + iV$ على منطقة معينة G تحوي القوس الأملس γ. وبالتالي ينتج من التعريف أن:

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma F'(z) dz = \int_\alpha^\beta F'(z(t)) z'(t) dt$$

ونجد باستخدام قاعدة السلسلة:

$$\int_\alpha^\beta F'(z(t)) z'(t) dt = \int_\alpha^\beta d \frac{d}{dt}[F(z(t))] dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}[U(z(t))] dt + i \int_{\alpha\, t}^\beta \frac{d}{dt}[V(z(t))] dt.$$

وبتطبيق النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل على كل من هذين التكاملين الحقيقيين نحصل على:

$$\int_\gamma f(z) dz = [U(z(\beta)) - U(z(\alpha))] + i[V(z(\beta)) - V(z(\alpha))]$$

$$= F(z(\beta)) - F(z(\alpha))$$

وبالإمكان أن نعمم هذه النتيجة على أقواس ملساء جزئيا، بإضافة النتائج التي نحصل عليها من أقواس ملساء جزئيا، وذلك لأن النتيجة تعتمد على نقطتي النهاية لكل قوس أملس ونكون بذلك قد أثبتنا النظرية التالية.

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل Fundamental theorem (of calculus)

إذا كانت $F(z)$ دالة تحليلية ومشتقتها $f(z) = F'(z)$ متصلة على منطقة G تحتوي على قوس أملس جزئيا:

$$\gamma : z = z(t), \alpha \le t \le \beta,$$

فإن:

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z(\beta)) - F(z(\alpha))$$

حيث إن التكامل يعتمد فقط على نقطتي النهاية للقوس γ فإن التكامل مستقل عن المسار. وعليه يمكن الحصول على نفس النتيجة لأي قوس أملس في G له نفس نقطتي النهاية. لأي منحنى γ مغلق أملس جزئيا، فإن النظرية الأساسية تعطي:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

حيث

$$F(z(\beta)) = F(z(\alpha))$$

مثال (٢,١,٣)

احسب $\int_\gamma zdz$ و $\int_{\gamma^*} zdz,$ حيث γ و γ^* القوسان الموضحان في الشكل (٢,٣).

الحل

الدالة المتصلة $f(z) = z$ مشتقة الدالة الكلية $F(z) = \frac{z^2}{2}$. بتمثيل γ وسيطيا كما في المثال (٢,١,٢) نحصل على:

$$\int_\gamma zdz = \int_0^1 (1+it)dt + \int_0^2 [(2-t)+i](-1)dt$$
$$= i\int_0^1 dt - \int_0^1 tdt + \int_1^2 (t-2)dt - i\int_1^2 dt = -1$$

وباستخدام التمثيل الوسيطي γ^* من المثال (٢,١,٢) نحصل على:

$$\int_{\gamma^*} zdz = \int_0^1 [(1-t)+it](-1+i)dt$$
$$= -\int_0^1 dt + i\int_0^1 (1-2t)dt = -1$$

باستخدام النظرية الأساسية لأي قوس أملس جزئيا γ بدايته عند 1 ونهايته عند i ، يتحقق:

$$\int_\gamma zdz = \frac{z^2}{2}\Big|_1^i = \frac{i^2-1}{2} = -1$$

مثال (٢,١,٤)

أثبت أن:

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

الحل

تبدو هذه النتيجة وكأنها تعارض النظرية الأساسية حيث $|z| = 1$ هو منحنى جوردان. إلا أن الدالة الأصلية للدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ هي لوغاريتم z وهي تحليلية على

سطح ريمان $\Re$ الموصوف في (١,٧) و(١,٩). المنحنى $|z|=1$ ليس مغلقا في ($\Re$).

هناك طريقتان للحصول على هذا التكامل سوف نوضحها فيما يلي :

لاحظ الآن إذا فرض عكس ذلك فإن التكامل على منحنيات جوردان يؤخذ بالاتجاه الموجب، وعليه إذا مثلنا وسيطيا المنحنى $|z|=1$ بالشكل :

$$z(t)=e^{it},\ \ 0\le t\le 2\pi$$

فإن :

$$z'(t)=ie^{it}$$

وبالتالي فإن التكامل يصبح :

$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{z'(t)dt}{z(t)}=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{it}}{e^{it}}dt=i\int_0^{2\pi}dt=2\pi i.$$

لاستخدام النظرية الأساسية في حساب هذا التكامل، نختار أي فرع لسطح ريمان $\Re$ للدالة التحليلية :

$$F(z)=\log z=\log|z|+i\arg z$$

فعلى سبيل المثال، بأخذ البداية عند $-i$ على الفرع الأصلي نجد :

$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}=\log|z|+i\arg z\Big|_{e^{-\pi i/2}}^{e^{3\pi i/2}}=i(3\pi/2)-i(-\pi/2)=2\pi i$$

مثال (٢,١,٥)

لنفرض أن $P(z)$ أية كثيرة حدود و γ قوس أملس جزئيا.

أثبت أن :

(أ) $\int_\gamma P(z)dz=0$ إذا كان γ منحنيا مغلقا.

(ب) $\int_\gamma P(z)dz$ يعتمد فقط على نهايتي γ.

الحل

كل كثيرة حدود $P(z)$ متصلة في C وأكثر من هذا إذا كان :

$$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0,$$

فإن $P(z)$ هي مشتقة لكثيرة الحدود التحليلية :

$$Q(z)=\frac{a_n z^{n+1}}{n+1}+\frac{a_{n-1}z^n}{n}+\ldots+\frac{a_1 z^2}{2}+a_0 z$$

وعليه فإن النظرية الأساسية محققة وكلا من الجزأين (ا) و(ب) يكون صحيحا.

مثال (٢,١,٦)

حيث $\cos z$ دالة كلية وتكاملها $\sin z$ فإن :

$$\int_{-i}^{i}\cos z dz=\sin z\Big|_{-i}^{i}=2\sin i=2i\sinh(1)$$

وعلى أي منحنى γ أملس جزئيا مغلق يكون :

$$\int_{\gamma}\cos z dz=0$$

تمارين (٢,١)

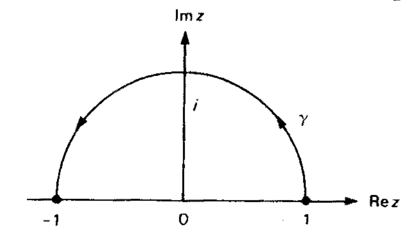
(١) أثبت أن التمثيل الوسيطي :

$0\le t\le 2\pi$ و $\gamma: z(t)=a\cos t+ib\sin t$

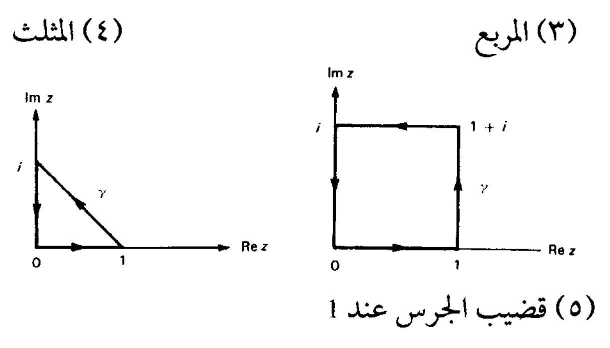
يمثل القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

في التمارين من (٢) إلى (٦) أوجد تمثيلا وسيطيا أملس جزئيا لكل من الأقواس والمنحنيات المذكورة :

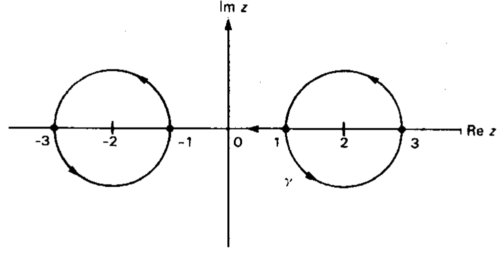
(٢) نصف الدائرة من 1 إلى -1.



(٣) المربع (٤) المثلث



(٥) قضيب الجرس عند 1



(٦) أثبت أن $z'(t)$ يمكن أن تعرف على أنها المتجه المماس للقوس:
$\gamma : z = z(t)$ عند جميع النقاط $z'(t) \neq 0$.

احسب التكاملات $\int \bar{z}dz$ ، $\int ydz$ و $\int xdz$ على المسارات المعطاة في التمارين من (٧) إلى (٩):

(٧) قطعة الخط المستقيم من 0 إلى $1-i$.

(٨) الدائرة $|z|=1$.

(٩) الدائرة $|z-a|=R$.

(١٠) احسب $\int_\gamma y\,dz$ حيث γ الخط المستقيم الذي يصل 1 بـ i.

(١١) احسب $\int_\gamma y\,dz$ حيث γ القوس في الربع الأول على طول $|z|=1$ بين 1 و i.

(١٢) احسب $\int_\gamma y\,dz$ حيث γ القوس على طول محور الإحداثيات بين 1 و i

(١٣) بملاحظة أن كل القيم في التمارين من (١٠) إلى (١٢) مختلفة، لماذا لا تتعارض هذه النتيجة مع النظرية الأساسية؟

استخدم التمثيل الوسيطي للأقواس لحساب التكاملات في التمارين من (١٤) إلى (٢٤) تأكد من حلك باستخدام النظرية الأساسية.

(١٤) احسب التكامل $\int (z-a)^n\,dz$ حيث n عدد صحيح وذلك حول الدائرة $|z-a|=R$، (الجواب في حالة $n=-1$ يختلف عن البقية).

(١٥) احسب $\int_\gamma e^z\,dz$ حيث γ خط مستقيم يصل 1 بالعدد i.

(١٦) احسب $\int_\gamma e^z\,dz$ حيث γ مسار في الربع الأول على الدائرة $|z|=1$ يصل بين 1 و i.

(١٧) احسب $\int_\gamma e^z\,dz$ حيث γ المسار على طول محور الإحداثيات الذي يصل 1 بالعدد i.

(١٨) احسب $\int_{-i}^{i} e^{\pi z}\,dz$.

(١٩) احسب $\int_{-1}^{i} \sinh(az)\,dz$

(٢٠) احسب $\int_1^i (z-a)^3\,dz$.

*(٢١) إذا كان القطع الناقص

$$z(t)=a\cos t+ib\sin t, 0\le t\le 2\pi, a^2-b^2=1$$

أثبت أن :

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\pm 2\pi,$$

يعتمد على القيم التي يأخذها الجذر.

(**إرشاد :** $1-z^2(t)=[z'(t)]^2$)

(٢٢) لنفترض $\gamma_1 : z(t)=e^{it}$ و $\gamma_2 : z(t)=e^{-it}$ حيث $0\le t\le \pi$

احسب $\int \frac{dz}{z^2}$ على طول كل من γ_1 و γ_2.

(٢٣) احسب $\int \mathrm{Log}\, z\,dz$ على طول كل من المنحنيين المذكورين في التمرين(٢٢).

(٢٤) احسب $\int \sqrt{z}dz$ على طول كل من المنحنيين المذكورين في التمرين (٢٢).
(استخدم الفرع الرئيسي للدالة $\sqrt{z}$).

(٢,٢) نظرية جرين ونتائجها

Green's Theorem and its Consequences

وجدنا في كل من المثالين (٢.١.٤) و(٢.١.٥) القسم السابق أن التكامل الخطي لكثيرة حدود على منحنى مغلق أملس جزئيا معدوم ولكن:

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

لاحظ أن الدالة $\frac{1}{z}$ غير تحليلية عند الصفر. فهل يمكن أن يكون التكامل الخطي للدالة على طول منحنى جوردان المغلق الأملس يساوي صفرا؟ إذا افترضنا أن مشتقة الدالة التحليلية المراد مكاملتها متصلة داخل منحنى جوردان الأملس. ليس هذا طلبا غير معقول، لأن المشتقة لكل دالة تحليلية صادفناها هي تحليلية. بُني الإثبات على النتيجة التالية الموجودة في معظم كتب التفاضل والتكامل. كما توجد في الملحق (ا-٣).

نظرية جرين Green's theorem

لنفترض أن G منطقة داخل منحنى جوردان الأملس جزئيا γ ، ولنفترض أن الدالتين الحقيقيتين p، و q متصلتان على $G \cup \gamma$ ومشتقاته الجزئية من المرتبة الأولى متصلة في G عندئذ فإن:

$$\iint_G (p_x + q_y) dxdy = \int_\gamma pdy - qdx$$

لنفترض أن $f = u + iv$ تحليلية على منحنى جوردان الأملس وداخله ،
وبإعادة كتابة تكامل f على طول γ كما في الشكل :

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u + iv)(dx + idy) = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy$$

إذا كانت f' متصلة على G فيكون كل من u_x, u_y, v_x, v_y متصلة. وبتطبيق نظرية جرين على التكاملين الخطيين في الطرف الأيمن نحصل على :

$$\int_\gamma f(z)dz = -\iint_G (v_x + u_y)dx\,dy + i\iint_G (v_x - u_y)dx\,dy$$

تحقق المشتقات الجزئية الأولى معادلتي كوشي -ريمان $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ حيث f تحليلية ، إذن تساوي كلا من الدوال المراد مكاملتها في الطرف الأيمن صفرا ، وذلك بفرض أن $f'(z)$ متصلة على G. وبذلك نكون قد أثبتنا النظرية التالية.

نظرية كوشي Cauchy's theorem

لنفترض أن $f(z)$ دالة تحليلية على منحنى جوردان الأملس γ وداخله ، عندئذ فإن :

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

ويعتمد هذا الإثبات على افتراض أن $f'(z)$ متصلة على G. وفي هذا القسم سوف نتحقق من هذا الشرط قبل أن نستخدم نظرية كوشي. وعلى كل حال سنثبت في القسم (٢,٥) أن هذا الشرط ليس ضروريا في الحقيقة سنثبت أن الدوال التحليلية لها مشتقات تحليلية.

مثال (١ ,٢ ,٢)

احسب :

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 + 4}dz$$

الحل

يفيد الرمز المستخدم أن التكامل على دائرة الوحدة مأخوذ في الاتجاه الموجب وكل من الدالة :

$$f(z)=e^z/(z^2+4) \quad \text{ومشتقتها} \quad f'(z)=\frac{(z^2-2z+4)}{(z^2+4)^2}e^z$$

تحليليتان على وداخل $|z|=1$ ، وبما أن المشتقة تحليلية ، فإنها متصلة. وبالتالي يمكن أن نطبق نظرية كوشي.

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2+4}dz=0$$

مثال (٢, ٢, ٢)

أثبت أن : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\theta+r^2}d\theta=1, \qquad 0<r<R$

تسمى الدالة المراد مكاملتها Poisson Kernel ، ولها عدة خواص مفيدة سوف ندرسها في الفصل السادس.

الحل

تساوي نواة بواسون (Poisson Kernel) الجزء الحقيقي من الكسر.

$$\frac{R+re^{i\theta}}{R-re^{i\theta}}=\frac{(R+re^{i\theta})(R-re^{-i\theta})}{(R-re^{i\theta})(R-re^{-i\theta})}=\frac{R^2-r^2+2irR\sin\theta}{R^2-2rR\cos\theta+r^2}$$

بوضع $z=re^{i\theta}$ مع ثبات r نجد أن :

$$\frac{dz}{d\theta}=rie^{i\theta}=iz$$

ومنه :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos\theta+r^2}d\theta=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{R+z}{R-z}\frac{dz}{z}\right)$$

ولكن باستخدام الكسور الجزئية نجد أن:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{R+z}{z(R-z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{R-z}\right)dz$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{dz}{z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{2dz}{R-z}$$

بإمكاننا إثبات أن التكامل الأول في الطرف الأيمن يساوي الوحدة بالطريقة المستخدمة في المثال (٢,١,٤) حيث $z = re^{it}$ و $z' = ire^{it}$ ، $0 \le t \le 2\pi$.

يساوي التكامل الأخير في الطرف الأيمن صفرا وذلك باستخدام نظرية كوشي ريمان حيث كل من $f(z) = \dfrac{2}{(R-z)}$ و $f'(z) = \dfrac{2}{(R-z)^2}$ تحليليتان على $|z| \le r$.

مثال (٣, ٢, ٢)

أثبت أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx \; dx = \sqrt{\pi}e^{-b^2}$$

الحـــــل

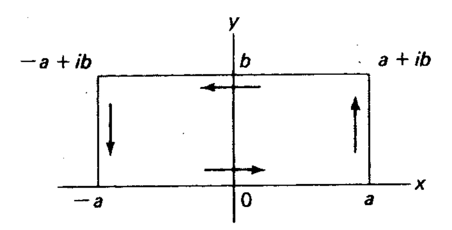
بتطبيـــــق نظرية كوشي على الدالة $f(z) = e^{-z^2}$ التحليلية على منطقة تحوي المستطيل $|x| \le a,$ و $0 \le y \le b$ (انظر الشكل رقم (٢,٤)) نحصل على:

$$0=\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx+\int_{0}^{b}e^{-(a+iy)^2}\,idy+\int_{a}^{-a}e^{-(x+ib)^2}\,dx+\int_{b}^{0}e^{-(-a+iy)^2}\,idy$$

$$=\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx-e^{b^2}\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\left(\cos 2bx-i\sin 2bx\right)dx$$

$$-ie^{-a^2}\int_{0}^{b}e^{y^2}\left(e^{2iay}-e^{-2iay}\right)dy$$

$$=\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx-e^{b^2}\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\cos 2bx\;dx+2e^{-a^2}\int_{0}^{b}e^{y^2}\sin 2ay\,dy, \qquad (1)$$



الشكل رقم (٢,٤). مستطيل التكامل.

حيث الجزء التخيلي من التكامل الأوسط معدوم. ولكن باستخدام الإحداثيات القطبية نحصل على :

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dx\,dy$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \pi, \tag{2}$$

وعليه فإن أول تكاملين في (1) يتقاربان عندما $a \to \infty$. بجعل $a \to \infty$ فالحد الأخير في (1) ينعدم وبالتالي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = e^{-b^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}e^{-b^2}$$

مثال (٤, ٢, ٢)

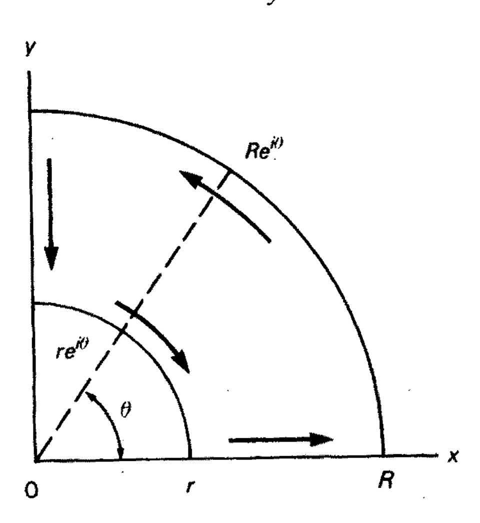
أثبت أن :

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

الحل

بمكاملة $\frac{e^{iz^2}}{z}$ على طول الحدود للحلقة $r \le |z| \le R$ و $0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$. انظر الشكل رقم (٢,٥) فإن نظرية كوشي تعطي :

$$\int_r^R \frac{e^{ix^2}}{x}dx + i\int_0^{\pi/2} e^{i(\mathrm{Re}^{i\theta})^2}d\theta - \int_r^R \frac{e^{-iy^2}}{y}dy - i\int_0^{\pi/2} e^{i(re^{i\theta})^2}d\theta = 0 \qquad (3)$$



الشكل رقم (٢,٥). منطقة التكامل.

باستخدام المتراجحة

$$\left|\int_a^b f(\theta)d\theta\right| \le \int_a^b |f(\theta)|d\theta$$

التي سنثبتها بالنسبة للدوال المركبة المراد مكاملتها في القسم (٢,٣)، نجد أن:

$$\left|i\int_0^{\pi/2} e^{i(\mathrm{Re}^{i\theta})}d\theta\right| \le \int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin 2\theta}d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin 2\theta}d\theta$$

$$< 2\int_0^{\pi/4} e^{-4R^2\theta/\pi}d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2R^2}\left[1 - e^{-R^2}\right]$$

حيث $h(\theta) = \sin 2\theta - (4\theta / \pi)$ تساوي الصفر عند $\theta = 0, \pi / 4$ وتحقق $h''(\theta) < 0$ لقيم $0 < \theta < \pi / 4$ ويعني هذا أن h مقعرة لأسفل وأن $\sin 2\theta \geq \frac{4\theta}{\pi}$. وبالتالي فإن التكامل الثاني في (3) ينعدم عندما $R \to \infty$. لكل عدد $\varepsilon > 0$ معطى يوجد عدد $r > 0$ حيث $\left|e^{iz^2} - 1\right| < \varepsilon$ كلما كان $|z| < r$ وبالتالي فإن:

$$\left|i \int_0^{\pi/2} e^{i(re^{i\theta})^2} d\theta - \frac{i\pi}{2}\right| = \left|i \int_0^{\pi/2} (e^{i(re^{i\theta})^2} - 1) d\theta\right| < \varepsilon \frac{\pi}{2},$$

وعلى هذا فإن التكامل الأخير في (3) يقترب من $i\frac{\pi}{2}$ عندما $r \to 0$. بجمع التكاملين الأول والثالث في (3) وبجعل $R \to \infty$ و $r \to 0$ نحصل على:

$$0 = \int_0^{\infty} \frac{e^{ix^2} - e^{-ix^2}}{x} dx - \frac{i\pi}{2} = 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx - \frac{i\pi}{2}$$

تمارين (٢، ٢)

(١) أثبت أن:

$$\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{Log} z}{z} dz = 0,$$

رغم أن $(\operatorname{Log} z)/z$ ليست تحليلية على $|z| < 1$.

فما هي النتيجة التي يمكن الحصول عليها إذا كاملنا:

$$\int_{\gamma} \frac{\log z}{z} dz$$

حيث $\gamma : z(t) = e^{it}$ و $0 \leq t \leq 2\pi$ ؟ وضّح.

باستخدام نظرية جرين في التمارين من (٢) إلى (٤)، حيث A تساوي مساحة G و ∂G حدود G.

(٢) أثبت أن: $\int_{\partial G} x dz = iA$

(٣) أثبت أن : $\int_{\partial G} y dz = -A$

(٤) أثبت أن : $\int_{\partial G} \bar{z}\, dz = 2iA$

(٥) أثبت أن :

$$\int_0^{\pi/2} e^{a\cos t} \cos(t + a\sin t)dt = \frac{\sin a}{a}, a > 0,$$

وذلك بمكاملة e^z على طول منحنى جوردان في الربع الأول المكوّن من ربع الدائرة $|z| = a$ ، وعلى قطعة الخط المستقيم من ia إلى 0 ومن 0 إلى a.

(٦) أثبت أن :

$$\int_0^T e^{at} \cos bt \ \ dt = \frac{e^{aT}(a\cos bT + b\sin bT) - a}{a^2 + b^2}$$

$$\int_0^T e^{at} \sin bt \ \ dt = \frac{e^{aT}(a\sin bT - b\sin bT) + b}{a^2 + b^2}$$

وذلك بمكاملة $f(z) = e^z$ على طول قطعة الخط المستقيم من 0 إلى $(a + ib)T$.

(٧) أثبت أن :

$$\int_0^T \sin at \cosh bt \ \ dt = \frac{b\sin aT \sinh bT - a\cos \ aT \cosh bT + a}{a^2 + b^2}$$

$$\int_0^T \cos at \sinh bt \ \ dt = \frac{b\cos aT \cosh bT + a\sin aT \sinh bT - b}{a^2 + b^2}$$

وذلك بمكاملة $f(z) = \sin z$ على طول قطعة الخط المستقيم من 0 إلى $(a + ib)T$.

(٨) احصل على التكاملات

$$\int_0^T \cos at \cosh bt \ \ dt = \frac{a\sin aT \cosh bT + b\cos aT \sinh bT}{a^2 + b^2}$$

$$\int_0^T \sin at \sinh bt \ \ dt = \frac{b\sin aT \cosh bT - a\cos aT \sinh bT}{a^2+b^2}$$

وذلك بمكاملة $f(z)=\cos z$ على طول القطعة المستقيمة من 0 إلى $(a+ib)T$.

(٩) بفرض أن $0<b<1$ وبتطبيق نظرية كوشي على الدالة $f(z)=(1+z^2)^{-1}$ على طول حدود المستطيل في الشكل (٢,٤)، أثبت أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-b^2+x^2)\ dx}{(1-b^2+x^2)^2+4x^2b^2} = \pi$$

(١٠) أثبت أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} \cos ax \ \ dx = \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-a^2/4k}, \qquad k>0, \ \ \text{a حقيقي}$$

حيث k عدد حقيقي موجب، وذلك باستخدام نفس الطريقة المتبعة في المثال (٢,٢,٣) مع الدالة $f(z)=e^{-kz^2}$ ، تأكد من الجواب بتبديل المتغيرات.

(١١) أثبت أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-b^2+x^2)\cos kx + 2xb\sin kx}{(1-b^2+x^2)^2+4x^2b^2} dx = e^{kb} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{1+x^2} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-b^2+x^2)\sin kx - 2xb\cos kx}{(1-b^2+x^2)^2+4x^2b^2} dx = 0$$

حيث $0<b<1$ و k عدد حقيقي.

(١٢) لنفترض أن $0<b<1/\sqrt{2}$ ن أثبت أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}\left(1+(x-ib)^4\right)}{\left|1+(x+ib)^4\right|^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} dx$$

(١٣) أثبت أن: $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin 2xb \ \ dx = e^{-b^2} \int_0^b e^{x^2} dx, \quad b>0$

وذلك بالتكامل حول مستطيل مناسب.

(١٤) أثبت أن :

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},$$

(تكاملات فرسينل Fresnel's Integrals). وذلك بتطبيق نظرية كوشي على الدالة $f(z) = e^{-z^2}$ على طول حدود القطاع $0 \le |z| \le R$ و $0 \le \arg z \le \pi/4$.

(١٥) أثبت أن : $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\sqrt{\sqrt{2}+1}$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin(x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\sqrt{\sqrt{2}-1},$$

وذلك بمكاملة e^{-z^2} على طول حدود القطاع $0 \le |z| \le R$ و $0 \le \arg z \le \pi/8$.

(١٦) أثبت تكامل دريشليت (Dirichlet's Integral) :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

وذلك بمكاملة $f(z) = e^{iz}/z$ على طول حدود المجموعة $r \le |z| \le R$ و $0 \le \arg z \le \pi$. تأكد من جوابك بتبديل المتغيرات في المثال (٤, ٢, ٢).

(٣,٢) صيغة كوشي للتكامل

The Cauchy Integral Formula

سوف نحتاج إلى الحقائق التالية حول التكامل.

نظرية

(i) $\int_\gamma [\alpha f_1(z) + \beta f_2(z)]dz = \alpha \int_\gamma f_1(z)dz + \beta \int_\gamma f_2(z)dz.$

(ii) $$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

حيث $\gamma_1 + \gamma_2$ المسار الذي يحوي أولا γ_1 ثم يليه γ_2.

(iii) $$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)$$

حيث $-\gamma$ المسار الذي اتجاهه عكس γ.

(iv) $$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \le \int_{\gamma} |f(z)||dz|$$

حيث $|dz|$ هو التفاضل بالنسبة لطول القوس لأن:

$$|dz| = |dx + idy| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = ds$$

البرهان

لإثبات (iv) لاحظ لأي ثابت حقيقي θ أن:

$$\operatorname{Re}\left(e^{-i\theta}\int_{\gamma} f(z)dz\right) = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(z(t))z'(t))dt \le \int_{\alpha}^{\beta} |f(z(t))||z'(t)|dt$$

لأن الجزء الحقيقي من العدد المركب لا يمكن أن يكون أكبر من القيمة المطلقة له. بكتابة $\int_{\gamma} f(z)dz$ بالصيغة القطبية مع وضع $\theta = \arg\left[\int_{\gamma} f(z)dz\right]$ ، نجد أن العبارة في الطرف الأيسر تؤول إلى القيمة المطلقة للتكامل، وتكون المتراجحة صحيحة. والإثباتات المتبقية هي نتائج مباشرة من تعريف التكامل الخطي في القسم (٢,١) وهي تطبيقات مباشرة مع بعض الإثبات المطول ولذلك تركت ولتكون بمثابة تمارين.■

إذا كانت $|f(z)| \le M$ عند أي نقطة على القوس γ الذي طوله L ، فإن الجزء (iv) للنظرية يعطي المتراجحة (المتباينة):

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \le M\int_{\gamma} |dz| = ML$$

مثال (٢,٣,١)

أثبت أن:

$$\left|\int_{|z|=1} e^{z} dz\right| \le 2\pi e.$$

الحل

من الجزء (iv) لدينا:

$$\left|\int_{|z|=1} e^z dz\right| \le \int_{|z|=1} \left|e^z\right| |dz|.$$

حيث $\left|e^z\right| = e^x \le e$ لجميع النقاط $z = x + iy$ على دائرة الوحدة:

$$\int_{|z|=1} \left|e^z\right| \; |dz| \le e \int_{|z|=1} |dz| \; = 2\pi e$$

والمتراجحة (المتباينة) محققة. في الحقيقة من الواضح أن:

$$\left|\int_{|z|=1} e^z \; dz\right| < 2\pi e$$

حيث $\left|e^z\right|$ تبلغ القيمة e فقط عند $z = 1$.

يلزم في كثير من التطبيقات اعتبار مناطق ليست بسيطة الترابط. وسوف نعمم نظرية كوشي للمناطق متعددة الترابط (multiply connected regions).

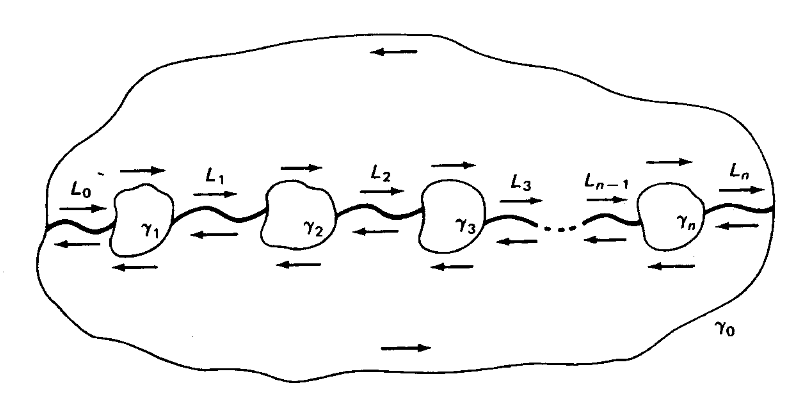
نظرية

لنفترض أن داخل منحنى جوردان الأملس جزئيا γ_0 يحتوي على منحنيات جوردان الملساء وغير المتقاطعة $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ وأي منها غير موجود داخل الآخر. لنفترض أن $f(z)$ تحليلية في المنطقة G التي تحتوي على المجموعة s المكونة من جميع النقاط الواقعة على γ_0 وداخله ولكن ليست داخل γ_k، $k = 1,\ldots,n$ عندئذ تكون:

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz$$

البرهان

يمكن دوما إيجاد أقواس ملساء جزئيا. ومنفصلة L_k حيث $k = 0,\ldots,n$ ، تصل γ_k بالقوس γ_{k+1} (حيث L_n يصل γ_n بالقوس γ_0)، وبذلك نحصل على منحنيين من منحنيات جوردان الملساء جزئيا ويقع كل منهما داخل منطقة جزئية وبسيطة الترابط من G. (وقد حذفنا البرهان لكونه بدهيا). انظر الشكل رقم (٢,٦).



الشكل رقم (٢,٦). مجال متعدد الترابط.

باستخدام نظرية كوشي فإن تكامل $f(z)$ على هذه المنحنيات كل في الاتجاه الموجب يتلاشى ولكن المساهمة الكلية لتلك المنحنيات تكافيء سير γ_0 في الاتجاه الموجب و $\gamma_1,...,\gamma_n$ في الاتجاه السالب (عكس)، $L_0,...,L_n$ في الاتجاه المعاكس. يؤدي هذا إلى إلغاء أحدهما الآخر وبالنتيجة فإن:

$$0 = \int_{\gamma_0 - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k} f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz$$

بعد ذلك سوف نثبت النتيجة المدهشة وهي: تعين بالكامل قيم دالة تحليلية داخل منحنى جوردان الأملس جزئيا بوساطة قيمها على المنحنى.

صيغة كوشي للتكامل The Cauchy integral formula

لنفترض أن $f(z)$ تحليلية على منطقة بسيطة الترابط تحتوي على منحنى جوردان γ الأملس جزئيا عندئذ تكون:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz$$

لجميع النقاط ζ داخل المنحنى γ.

البرهان

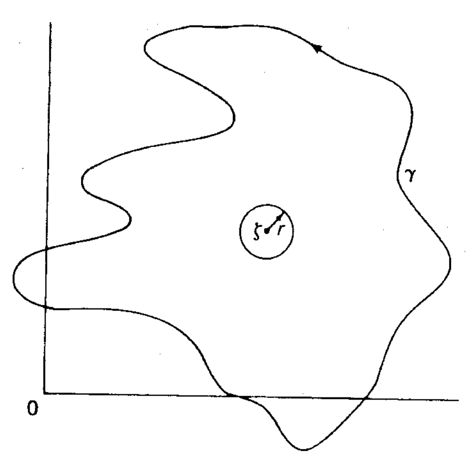
لتكن ζ نقطة ثابتة داخل γ ، عندئذ، يوجد لكل $\varepsilon > 0$ معطى قرص مغلق $|z-\zeta| \le r$ داخل γ بحيث يكون:

$$|f(z)-f(\zeta)| < \varepsilon$$

انظر شكل (٢,٧).

وبما أن $\dfrac{f(z)}{(z-\zeta)}$ تحليلية على المنطقة التي تحوي النقاط على γ وداخلها والتي تحقق $|z-\zeta| \ge r$ ، نظرية كوشي على المناطق المتعددة الترابط تعطي:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\zeta|=r}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz$$



الشكل رقم (٢,٧) صيغة كوشي للتكامل.

ولكن:

$$\int_{|z-\zeta|=r}\frac{f(z)}{z-\zeta}\ dz = f(\zeta)\int_{|z-\zeta|=r}\frac{dz}{z-\zeta} + \int_{|z-\zeta|=r}\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\ dz$$

من المثال (٢,١,٤) أو تمرين (١٤) من القسم (٢,١)، يساوي التكامل الأول من الطرف الأيمن $2\pi i$ ، وبالتالي:

$$\left|\int_{|z-\zeta|=r}\frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz-2\pi i f(\zeta)\right|\le\int_{|z-\zeta|=r}\frac{|f(z)-f(\zeta)|}{|z-\zeta|}|dz|<2\pi\varepsilon$$

وبما أن ε عدد صغير اختياري قريب من الصفر ، فإن البرهان قد اكتمل.

مثال (٢,٣,٢)

أوجد :

$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^3+z}dz$ على المنحنيات المعطاة :

(ا) $\gamma:|z|=2$ (ب) $\gamma:|z|=\frac{1}{2}$ (جـ) $\gamma:|z-i/2|=1$

الحل

(ا) $\gamma:|z|=2$

بإيجاد الكسور الجزئية للمقدار $\frac{\cos z}{z^3+z}$ نحصل على :

$$\int_\gamma\frac{\cos z}{z^3+z}\,dz=\int_\gamma\frac{\cos z}{z}\,dz-\tfrac{1}{2}\int_\gamma\frac{\cos z}{z+i}\,dz-\tfrac{1}{2}\int_\gamma\frac{\cos z}{z-i}\,dz$$

$$=2\pi i\left[\cos(0)-\tfrac{1}{2}\cos(-i)-\tfrac{1}{2}\cos i\right]=2\pi i\left[1-\cosh(1)\right]$$

(ب) $\gamma:|z|=\frac{1}{2}$

وبما أن الدالة $\frac{\cos z}{(z^2+1)}$ تحليلية على γ وداخلها فإن التكامل يساوي $2\pi i$ مضروبا في قيمة الدالة عند $z=0$ أي :

$$\int_\gamma\frac{\cos z}{z^3+z}dz=2\pi i$$

(جـ) $\gamma:|z-i/2|=1$

وبما أن الدالة $\frac{\cos z}{z+i}$ تحليلية على وداخل γ وأن :

$$\frac{1}{z(z-i)} = i\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-i}\right)$$

فإن :

$$\int_{\gamma} \frac{\cos}{z^3 - z} dz = 2\pi i\left[i\left(\frac{\cos(0)}{i}\right) - i\left(\frac{\cos i}{2i}\right)\right] = 2\pi i\left[1 - \frac{1}{2}\cosh(1)\right]$$

بالطبع يمكن إنجاز الأمثلة الثلاثة جميعها باستخدام الكسور الجزئية التي حصلنا عليها في (ا)، مع ملاحظة أن الجزء المراد تكامله ينعدم عندما تقع النقط 0 أو $\pm i$ خارج γ.

إذا فاضلنا صيغة كوشي للتكامل بالنسبة إلى ζ داخل علامة التكامل فإنه يمكن الحصول على صيغة للتفاضل عند جميع النقاط داخل γ :

$$f'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^2} dz$$

للتحقق من هذه المعادلة نستخدم صيغة كوشي للتكامل . نعيد كتابة :

$$\begin{aligned}\frac{f(\zeta+h) - f(\zeta)}{h} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^2} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{z-\zeta-h} - \frac{1}{z-\zeta}\right) - \frac{1}{(z-\zeta)^2}\right] dz \\ &= \frac{h}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-\zeta)^2(z-\zeta-h)}\end{aligned}$$

لنفترض أن d أقصر مسافة من ζ إلى γ و M القيمة العظمى للدالة $|f(z)|$ على γ و L طول γ ، ولنفترض أن $|h| \le d/2$. فإن :

$$|z-\zeta-h| \ge |z-\zeta| - |h| \ge d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$$

ومن ثم فإن :

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)\ dz}{(z-\zeta)^2(z-\zeta-h)}\right| \le \frac{ML|h|}{\pi d^3}$$

وبجعل $h \to 0$ نحصل على

$$f'(\zeta)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\zeta+h)-f(\zeta)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\zeta)^2}dz$$

في القسم (٢,٥) سوف نعمم هذه الطريقة، ونثبت أن نظرية كوشي للتفاضل:

$$f^{(n)}(\zeta)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}dz,\ n=1,2,....$$

تكون صحيحة لجميع النقاط ζ داخل منحنى جوردان الأملس جزئيا γ داخل في منطقة بسيطة الترابط G التي تكون عليها $f(z)$ تحليلية. لاحظ أن هذه الصيغة تدل على أن $f(z)$ لها مشتقات من جميع الرتب على G. وعليه فإن المشتقة لدالة تحليلية هي أيضا تحليلية وبأخذ هذه الحقيقة نحصل على نقيض نظرية كوشي التي دائما مفيدة في بناء تحليلية الدالة.

نظرية موريرا (Morera's theorem)

إذا كانت $f(z)$ متصلة في منطقة بسيطة الترابط G وتحقق:

$$\int_\gamma f(z)dz=0$$

لجميع المنحنيات المغلقة الملساء جزئيا γ في G فإن $f(z)$ تحليلية في G.

البرهان

لنختر نقطة z_0 في G ولنعرف F على الشكل التالي:

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

لجميع النقاط z في G فإن $F(z)$ معرفة جيدا والسبب أنها مستقلة عن المسار. إذا كان كل من γ_1 و γ_2 منحنيان أملسان جزئيا في G من z_0 إلى z فإن $\gamma=\gamma_1-\gamma_2$ منحنى مغلق أملس جزئيا في G وأن:

$$0=\int_\gamma f(\zeta)d\zeta=\int_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta-\int_{\gamma_2} f(\zeta)d\zeta$$

وبما أن f متصلة لأية نقطة z في G فإنه يوجد لكل $\varepsilon > 0$ قرص $|\zeta - z| < \delta$ في G حيث $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$.

إذا كان $|h| < \delta$ نحصل على:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right] = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\zeta)d\zeta,$$

حيث يمكن أن نأخذ التكامل على الخط الواصل من z إلى $z + h$.

وبما أن:

$$f(z) = \frac{f(z)}{h}\int_{z}^{z+h} d\zeta,$$

فبالطرح نحصل على:

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} [f(\zeta) - f(z)]\, d\zeta\right|$$

$$\le \frac{1}{|h|}\int_{z}^{z+h} |f(\zeta) - f(z)||d\zeta| < \varepsilon$$

إذن $F'(z) = f(z)$ وعليه F تحليلية على G. ومنه F لها مشتقة تحليلية، وهذا يثبت أن f تحليلية أيضا على G.

مثال (٣, ٣, ٢)

أوجد:

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2(z-1)} dz \quad \text{:على}$$

(ا) $\gamma: |z| = \frac{1}{3}$ (ب) $\gamma: |z-1| = \frac{1}{3}$ (جـ) $\gamma: |z| = 2$

الحل

(ا) $\gamma: |z| = \frac{1}{3}$

في هذه الحالة $\cos z/(z-1)$ تحليلية على γ وداخلها، وبالتالي باستخدام نظرية كوشي للمشتقات نحصل على:

$$\int_\gamma \frac{\left(\frac{\cos z}{z-1}\right)}{z^2}dz = 2\pi i\left(\frac{\cos z}{z-1}\right)'\Bigg|_{z=0} = -2\pi i,$$

(ب) $\gamma: |z-1| = \frac{1}{3}$

الآن $z^{-2}\cos z$ تحليلية على γ وداخلها، وبالتالي التكامل يساوي $2\pi i$ مضروبا بقيمة المقدار $z^{-2}\cos z$ عند $z=1$ ؛ أي أن:

$$\int_\gamma \frac{z^{-2}\cos z}{z-1}dz = 2\pi i\cos\ (1)$$

(جـ) $\gamma: |z| = 2$

باستخدام نظرية كوشي على المنطقة المتعددة الترابط، يمكن أن نستبدل γ بالدوائر في الجزء (ا) و(ب). إذن ناتج التكامل يساوي $2\pi i[\cos(1)-1]$. وبطريقة أخرى وباستخدام الكسور الجزئية نحصل على:

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2(z-1)}dz = \int_\gamma \cos z\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\right)dz$$

$$= 2\pi i[\cos(1)-\cos(0)+\sin(0)] = 2\pi i[\cos(1)-1],$$

وذلك بوساطة نظرية كوشي للتفاضل.

تمارين (٢,٣)

في التمارين من (١) إلى (٣) احسب التكامل:

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$$

بتفريق الدالة داخل التكامل إلى كسورها الجزئية.

(١) إذا كانت كل من a وb داخل γ.

(٢) إذا كانت كل من a وb خارج γ.

(٣) إذا كانت b تقع داخل γ وa خارجها.

لنفترض أن:

$$\gamma : z(t) = 2e^{it} + 1 \quad \text{و} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

احسب التكامل في التمارين من (٤) إلى (٧):

(٤) $\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz$

(٥) $\int_\gamma \frac{\cos z}{z-1} dz$

(٦) $\int_\gamma \frac{\sin z}{z^2+1} dz$

(٧) $\int_\gamma \frac{\sin z}{z^2-z} dz$

لنفترض أن:

$$\gamma : z(t) = 2e^{it} + 1 \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

احسب التكاملات في التمارين من (٨) إلى (١١):

(٨) $\int_\gamma \frac{e^z}{z^2} dz$

(٩) $\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-1)^2} dz$

(١٠) $\int_\gamma \frac{\sin z}{(z^2+1)^2} dz$

(١١) $\int_\gamma \frac{\sin z}{(z-1)^3} dz$

أثبت المتساويات التكاملية في التمارين من (١٢) إلى (١٤):

(١٢) $\int_{\gamma} [\alpha f_1(z)+\beta f_2(z)]dz=\alpha\int_{\gamma} f_1(z)dz+\beta\int_{\gamma} f_2(z)dz$

(١٣) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz=\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz$

(١٤) $\int_{-\gamma} f(z)dz=-\int_{\gamma} f(z)dz$.

(١٥) بدون حساب التكامل أثبت أن:

$$\left|\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}\right|\le\frac{4\pi}{3}$$

(١٦) إذا كان γ نصف الدائرة:

$$|z|=R,|\arg z|\le\pi/2,R>1$$

أثبت أن:

$$\left|\int_{\gamma} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}dz\right|\le\frac{\pi}{R}\left(\operatorname{Log}R+\frac{\pi}{2}\right)$$

وبالتالي فإن قيمة التكامل تؤول إلى الصفر عندما $R\to\infty$.

(١٧) احسب $\int_{|z|=1} |z+1||dz|$

(١٨) لنفترض أن $f(z)$ تحليلية ومحدودة بالعدد M في $|z|\le R$ أثبت أن:

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{MRn!}{\left(R-|z|\right)^{n+1}}\quad,\quad |z|<R.$$

(١٩) إذا كانت $f(z)$ تحليلية في $|z|<1$ و $|f(z)|\le(1-|z|)^{-1}$ فبرهن على أن:

$$\left|f^{(n)}(0)\right|\le(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(٢٠) أتوجد دالة تحليلية $f(z)$ تحقق $\left|f^{(n)}(z)\right|>n!n^n$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n عند نقطة ما z ؟

(٢١) احسب $\int_{|z|=1} \frac{e^{kz^n}}{z} dz,.$

حيث n عدد صحيح موجب. أثبت أن:

$$\int_0^{2\pi} e^{k\cos n\theta}\cos(k\sin n\theta)d\theta = 2\pi$$

(٢٢) إن كثيرة الحدود للجندر (Legendre Polynomial) $P_n(z)$ تعرف بالشكل:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n]$$

استخدم صيغة كوشي للتفاضل وأثبت أن:

$$P_n(z)\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(\zeta^2-1)^n d\zeta}{2^n(\zeta-z)^{n+1}}$$

حيث z نقطة داخل منحنى جوردان الأملس جزئيا γ .

(٢٣) أثبت نظرية موريرا الموسعة التالية: لنفترض أن $f(z)$ متصلة في المنطقة G (من الممكن أن تكون متعددة الترابط). ولنفترض أن لكل ζ في G يوجد قرص D محتوي ζ في G بحيث يكون:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

لجميع المنحنيات المغلقة الملساء جزئيا γ الموجودة في D، فإن $f(z)$ عندئذ تكون تحليلية في G.

(٢٤) لنفترض أن $P(z)$ كثيرة حدود ليس لها جذر يقع على منحنى جوردان الأملس جزئيا γ ، أثبت أن:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}dz$$

يساوي عدد جذور $P(z)$ داخل γ بما فيها المكررة.

(٢,٤) نظرية ليوفيل ومبدأ القيمة العظمى

Liouvile's Theorem and The Maximum Principle

نعرض في هذا البند ثلاث نتائج مفيدة من صيغة كوشي للتكامل ونعممها إلى المشتقات العليا.

نظرية جاوس للقيمة المتوسطة Gauss's mean value theorem

لنفترض أن $f(z)$ تحليلية في $|z-\zeta|<R$ ، عندئذ يكون :

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta+re^{i\theta})d\theta, \quad 0<r<R$$

البرهان

تذكرنا صيغة كوشي للتكامل بأن :

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\zeta|=r}^{2\pi} \frac{f(z)}{z-\zeta}dz,$$

لكل $R>r>0$. إذا كانت $z=\zeta+re^{i\theta}$ فإن $z'(\theta)=ire^{i\theta}$ ومنها تتحقق المتساوية المطلوبة ■

تقدير كوشي Cauchy's estimate

لنفترض أن $f(z)$ تحليلية وتحقق $|f(z)|\le M$ في $|z-\zeta|\le r$ ، فإن :

$$\left|f^{(n)}(\zeta)\right|\le\frac{Mn!}{r^n}$$

البرهان

بوساطة نظرية كوشي للتفاضل يكون لدينا :

$$\left|f^{(n)}(\zeta)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z-\zeta|=r}\frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}dz\right|$$

$$\leq \frac{Mn!}{2\pi r^{n+1}} \int_{|z-\zeta|=r} |dz| = \frac{Mn!}{r^n} \quad \blacksquare$$

نظرية ليوفيل Liouile's theorem

أي دالة كلية لا يمكن أن تكون محدودة على C إلا إذا كانت ثابتة.

البرهان

لنفترض أن $f(z)$ كلية ومحدودة بالعدد M، فعند أي نقطة ζ في C يفيدنا تقدير كوشي بأن $|f'(\zeta)| \leq \frac{M}{r}$ ولكن يمكـــن أن تكون r كبيرة جدا وبالتالي فإن$f'(\zeta)=0$ عند جميع ζ في C ومنه تكون $f(z)$ ثابتة في C. $\blacksquare$

بعد ذلك نثبت واحدة من أكثر النظريات فائدة في نظرية الدوال التحليلية.

مبدأ القيمة العظمى Maximum principle

إذا كانت $f(z)$ تحليلية وغير ثابتة في المنطقة G، فإن $|f(z)|$ ليس لها قيمة عظمى في G.

البرهان

لنفترض أنه توجد نقطة z_0 في G تحقق $|f(z_0)| > |f(z)|$ لجميع z من G. بما أن z_0 نقطة داخلية فيوجد عدد $r > 0$ بحيث يقع القرص المغلق $|z - z_0| \leq r$ داخل G. إذن بوساطة نظرية جاوس للقيمة المتوسطة نجد أن:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt,$$

يعني هذا أن قيمة الدالة عند مركز الدائرة تساوي متوسط قيمة التكامل لقيمة الدالة على الدائرة. من الفرض $|f(z_0 + re^{it})| \leq |f(z_0)|$ ، إذا كانت المتباينة المطلقة

صحيحة لبعض قيم t فإنها تكون صحيحة بوساطة اتصال $|f(z)|$ على قوس من الدائرة. ولكن هذا يعطي :

$$|f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{it})|dt < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|dt = |f(z_0)|$$

وهذا تعارض ، وعليه فإن $|f(z_0+re^{it})| = |f(z_0)|$ عندما تكون $0 \le t \le 2\pi$. وبما أن الطريقة صحيحة على كل الدوائر $|z-z_0| = s$ ، $0 < s \le r$ فإن $|f(z)|$ تكون ثابتة على القرص $|z-z_0| = r$.

لنفترض أن S المجموعة التي تحوي كل النقاط z في G وتحقق :

$$|f(z)| = |f(z_0)|$$

باستخدام التعليل الأعلى ، يتبين أن كل تلك النقاط نقاط داخلية للمجموعة S ، وبالتالي تكون S مفتوحة. ولكن أي نقطة في $T = G - S$ هي نقطة داخلية أيضا بوساطة اتصال $|f(z)|$ فلا تحتوي T ولا S على نقطة حدودية للمجموعة الأخرى ؛ حيث إن كل منهما مفتوحة ، وبما أن G مترابطة فيجب أن تكون T خالية ، وبالتالي $S = G$ ، وباستخدام المشتقة الصفرية من البند (١,٦) ، فإن $f(z)$ ثابتة في G ، وهذا يعارض الفرضية. وبالتالي فإن $|f(z)|$ ليس لها قيمة عظمى في G ، والإثبات قد اكتمل. ■

لنرمز بالرمز $\overline{G}$ للمجموعة التي تحتوي على G مع حدودها. وحيث خارج المجموعة G مفتوح ، فإن $\overline{G}$ تكون مغلقة. بإمكاننا الآن إعادة صياغة مبدأ القيمة العظمى بالطريقة التالية.

نتيجة

لنفترض أن $f(z)$ تحليلية على منطقة محدودة G ومتصلة عليها ، فإن $|f(z)|$ تحصل على قيمتها العظمى على حدود G.

البرهان

بما أن $\overline{G}$ مغلقة ومحدودة وأن $|f(z)|$ متصلة على $\overline{G}$ ، فإن نظرية التفاضل العادية تفيدنا بأن $|f(z)|$ تأخذ قيمتها العظمى عند بعض النقاط على $\overline{G}$. وبوساطة مبدأ القيمة العظمى ، فإن الدالة لا تأخذ قيمتها العظمى داخل G ، وبالتالي يجب أن تكون عند حدودها.

مبدأ القيمة الصغرى Minimum principle

لنفترض أن $f(z)$ تحليلية في منطقة محدودة G ومتصلة وغير صفرية على $\overline{G}$ ، فإن $|f(z)|$ تأخذ قيمتها الصغرى عند حدود G.

البرهان

لنفترض أن $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ ، عندئذ تكون g تحليلية في G ومتصلة على $\overline{G}$ باستخدام النتيجة السابقة فإن $|g(z)|$ تحصل على قيمتها العظمى (وبالتالي تحصل $|f(z)|$ على قيمتها الصغرى) على حدود G. ■

تعطى نظرية ليوفيل إثباتاً بسيطا لنظرية مهمة في مبادئ الجبر التي تذكر دائما بدون إثبات.

النظرية الأساسية للجبر Fundamental theorem of algebra

كل كثيرة حدود من درجة أكبر من الصفر لها جذر على الأقل.

البرهان

لنفترض أن :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

لا تساوي الصفر لأي قيمة z. إذن الدالة $f(z)=\frac{1}{p(z)}$ كلية. وعلاوة على هذا فإن $|f(z)|$ تقترب من الصفر كلما اقتربت $|z|$ من اللانهاية والسبب هو أن:

$$|f(z)|=\frac{1}{|z|^{n}\left|a_{n}+\frac{a_{n-1}}{z}+\ldots+\frac{a_{0}}{z^{n}}\right|}$$

وبالتالي $|f(z)|$ محدودة لجميع قيم z. بوساطة نظرية ليوفيل، فإن $f(z)$ ثابتة، وبالتالي $P(z)$ ثابتة أيضا، وهذا يناقض الفرض بأن $n>0$. إذن $P(z)$ لها على الأقل جذر واحد.

لإثبات أن $P(z)$ لها n من الجذور (شاملة الجذور المكررة)، نلاحظ من النظرية الأساسية للجبر أن $P(z)$ لها على الأقل جذرا واحدا وليكن ζ_0. وبالتالي:

$$\begin{aligned}P(z)&=P(z)-P(\zeta_{0})\\&=a_{n}(z^{n}-\zeta_{0}^{n})+a_{n-1}(z^{n-1}-\zeta_{0}^{n-1})+\ldots+a_{1}(z-\zeta_{0})\\&=(z-\zeta_{0})Q(z)\end{aligned}$$

حيث $Q(z)$ كثيرة حدود من الدرجة $n-1$ في z. إذا كان $n-1>0$ فإن $Q(z)$ لها جذر. وبالاستمرار على هذا المنوال يمكننا الحصول على n من العوامل للمقدار $P(z)$ وبالتالي يكون لـ $P(z)$ بالضبط n من الجذور. ■

تمارين (٢,٤)

(١) أثبت أن الدالة الكلية التي تحقق $|f(z)|<|z|^{n}$ لبعض n و $|z|$ كبيرة جدا، يجب أن تكون كثيرة حدود.

(**إرشاد:** طبق المتراجحات في التمرين (١٨)، البند (٣,٢) على $f^{n}(z)$ أو $f^{(n+1)}(z)$).

(٢) لنفترض أن $f(z)$ تحليلية في $|z|<1$ وتحقق $f(0)=0$. عرف $F(z)=\frac{f(z)}{z}$ لجميع z في $0<|z|<1$. وأذكر القيمة التي يمكن أن تُعطى إلى $F(0)$ لجعل $F(z)$ تحليلية في $|z|<1$.

[**إرشاد**: طبق نظرية كوشي لمشتقة $F(z)$ على $|z| = r < 1$ ، وبالتالي أثبت أن الدالة الناتجة تحليلية على $r < |z|$ وتتطابق F على $1 > |z| > 0$ ، استخدم الكسور الجزئية].

(٣) مستخدما نتائج التمرين السابق ومبدأ القيمة العظمى ، أثبت تمهيدية شوارتز (Schwarz's lemma : لنفترض أن $f(z)$ تحليلية على $|z| < 1$ وتحقق الشروط $f(0) = 0$ ، $|f(z)| \leq 1$ عندئذ تكون $|f(z)| < |z|$ و $|f'(0)| \leq 1$ وتكون المساواة فقط عندما $f(z) = e^{i\theta} z$ من أجل ثابت حقيقي θ .

(٤) أثبت أنه في تمهيدية شوارتز $|f(z)| \leq 1$ لقيم $|z| < 1$ تعطي $|f'(0)| \leq 1$ مهما تكن قيمة المقدار $f(0)$.

(٥) أعط مثالا لبيان كون الشرط غير الصفري ضروريا لصحة مبدأ القيمة الصغرى.

(٦) لنفترض أن $f(z)$ تحليلية غير ثابتة في $|z| < R$ ولنرمز بالرمز $M(r)$ للقيمة العظمى للدالة $|f(z)|$ على $|z| = r$ ، أثبت أن $M(r)$ متزايدة لكل $0 \leq r < R$.

(٧) أثبت أنه إذا كانت $f(z)$ تحليلية وغير ثابتة في منطقة محدودة G ومتصلة على G ولها قيمة مطلقة ثابتة على حدود G فإن لها على الأقل صفرا واحدا في G.

(٨) أثبت نظرية الثلاث دوائر (Three circles theorem): إذا كانت $f(z)$ تحليلية في منطقة تحوي الحلقة $0 < r_1 \leq |z| \leq r_2$ وتحقق المتراجحتين $|f(z)| \leq M_1$ على $|z| = r_1$ و $|f(z)| \leq M_2$ على $|z| = r_2$ فإن القيمة العظمى للدالة $|f(z)|$ على $|z| = r$ ، $r_1 \leq r \leq r_2$ تساوي على الأكثر :

$$M_1^{(\log r_2 / r)/(\log r_2 / r_1)} . M_2^{(\log r / r_1)/(\log r_2 / r_1)}$$

(٩) النظرية الأساسية في الجبر (إثبات بديل).

أثبت أنه لأية كثيرة حدود غير ثابتة :

$$P(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0 \qquad \text{و} \qquad a_n \neq 0,$$

يوجد على الأقل جذر واحد، بفرض أن $P(z)$ لا تساوي الصفر ومكاملة $a_0 / zP(z)$ على $|z| = R$ مع $R \to \infty$.

(٢,٥) نظرية كوشي جورساه (اختياري)

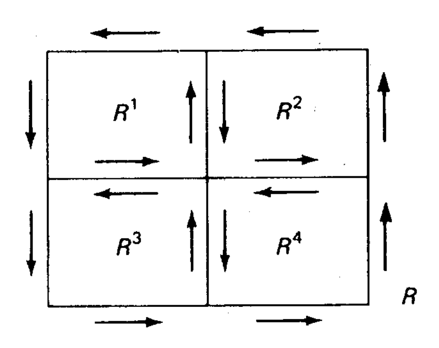
The Cauchy-Goursat Theorem

تتطلب كل من النظرية الأساسية ونظرية كوشي المبرهنتان في البندين (٢,١) و(٢,٢) شروطا حتى تضمنا أن:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0,$$

حيث γ منحنى مغلق أملس جزئيا. تتطلب النظرية الأساسية أن تكون $f(z)$ مشتقة متصلة لدالة $F(z)$ التحليلية في منطقة G تحوي γ. بينما تتطلب نظرية كوشي أن تكون $f(z)$ تحليلية ولها مشتقة متصلة على منحنى جوردان الأملس جزئيا γ وداخله. نثبت في هذا البند أن كلا الفرضين يتحققان عندما تكون $f(z)$ تحليلية. وأكثر من هذا سوف نكون قادرين على تعميم نظرية كوشي إلى أي منحنى مغلق أملس جزئيا γ.

تقدم النظرية التالية الخطوة الأولى في إثبات أن الدالة التحليلية لها مشتقات تحليلية. لاحظ أن هذه النتيجة مشابهة كثيرا لنظرية كوشي في البند (٢,٢) ما عدا $f'(z)$ فغير مفترض أن تكون متصلة داخل المستطيل R الموضح في الشكل (٢,٨).



الشكل رقم (٢,٨). تقسيم المستطيل.

نظرية كوشي جورساه Cauchy-Gorusat theoreom

لنفترض أن $f(z)$ تحليلية في منطقة تحوي المستطيل R المعطى بالمتراجحات: $a \le x \le b, c \le y \le d$ عندئذ:

$$\int_{\partial R} f(t)dt = 0,$$

حيث ∂R حدود المستطيل R.

البرهان

لتبسيط الرموز نفترض أن:

$$I(R) = \int_{\partial R} f(z)dz$$

لأي مستطيل R. قسم R إلى أربعة أقسام R^1, R^2, R^3, R^4 ، لاحظ أن:

$$I(R) = I(R^1) + I(R^2) + I(R^3) + I(R^4),$$

والسبب في ذلك أن التكاملات على الأضلاع المشتركة تلغي بعضها وذلك باستخدام الجزء (iii) من النظرية الأولى في القسم (٢,٣) لأن أحدهما في اتجاه يعاكس اتجاه الآخر (انظر الشكل رقم (٢,٨)).

بوساطة المتراجحة (المتباينة) المثلثية نحصل على:

$$|I(R)| \le |I(R^1)| + |I(R^2)| + |I(R^3)| + |I(R^4)|,$$

وعليه فإن واحدا على الأقل من R^j يحقق $|I(R^j)| \ge |I(R)|/4$ ويمكن أن يكون أكثر من عنصر واحد من R^j له هذه الخاصية. اختر العنصر الذي له دليل أصغر وسمة R_1. بإعادة الطريقة أعلاه لعدد غير منته من المرات نحصل على متتالية متداخلة من المستطيلات:

$$R \supset R_1 \supset \ldots \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \ldots$$

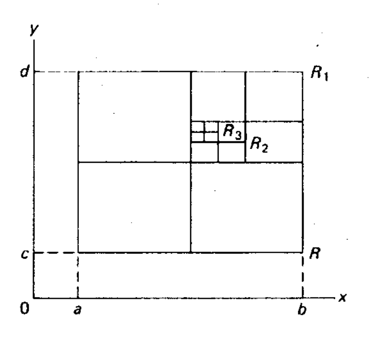
تحقق:

$$|I(R_n)| \ge \frac{|I(R_{n-1})|}{4},$$

وهذا يعطي :

$$|I(R_n)| \ge \frac{|I(R)|}{4^n},$$

انظر الشكل رقم (٢,٩). لنرمز بالرمز $z_n^* = x_n^* + iy_n^*$ للركن الأيسر السفلي للمستطيل R_n. من الواضح من تكوين المستطيلات R_n ، أن المتتاليتين $\{x_n^*\}$ و $\{y_n^*\}$ من الأعداد الحقيقية غير متناقصتين ومحدودتين من الأعلى بالعددين b و d على الترتيب. لذلك فإن كلا من نهايتيهما x^* و y^* موجودة وسنثبت أن النقطة $z^* = x^* + iy^*$ تنتمي إلى كل المستطيلات R_n.



الشكل رقم (٢,٩)... $R \supset R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset$

إذا كان $z_n = x_n + iy_n$ الركن الأيمن الأعلى من المستطيل R_n فإن x_n و y_n حدان علويان للمتتاليتين $\{x_n^*\}$ و $\{y_n^*\}$ ، ويؤدي هذا إلى أن $y_n^* \le y^* \le y_n$ و $x_n^* \le x^* \le x_n$ وبالتالي z^* تقع في R_n لجميع n. وأكثر من هذا لا توجد نقطة غيرها في جميع المستطيلات R_n. حيث $|z_n - z_n^*| \to 0$ عندما $n \to \infty$.

ليكن $\varepsilon > 0$ معطى وحينئذ يمكن الحصول على $\delta > 0$ بحيث تكون $f(z)$ تحليلية ، وبالتالي فإن :

$$\left|\frac{f(z)-f(z^*)}{z-z^*}-f'(z^*)\right|<\varepsilon$$

كلما كان $\left|z-z^*\right|<\delta$. وبالتالي لقيم n الكبيرة جدا يكون R_n محتوي في $\left|z-z^*\right|<\delta$ حيث $f(z^*)$، $f(z^*)$ وz^* ثوابت ، فإن المثال (٢,١,٥) من القسم (٢,١) يعطي :

$$\int_{\partial R_n} f(z^*)dz=0=\int_{\partial R_n} f'(z^*)(z-z^*)dz$$

وبإضافة صفر إلى التكامل $I(R_n)$ نحصل على :

$$\left|I(R_n)\right|=\int_{\partial R_n}\left[f(z)-f(z^*)-f'(z^*)(z-z^*)\right]dz$$

بوساطة الجزء (iv) من أول نظرية من القسم (٢,٣) ومن الشروط العليا نحصل على :

$$\left|I(R_n)\right|\le\int_{\partial R_n}\left|f(z)-f(z^*)-f'(z^*)(z-z^*)\right|\left|dz\right|$$

$$<\varepsilon\int_{\partial R_n}\left|z-z^*\right|\left|dz\right|\le\varepsilon\ D_nL_n$$

حيث $D_n=\left|z_n-z_n^*\right|$ و $L_n=\int_{\partial R_n}\left|dz\right|$ هما قطر وطول محيط R_n على الترتيب ولكن :

$$D_n=\tfrac{1}{2}D_{n-1}=\ldots=2^{-n}D,\qquad L_n=\tfrac{1}{2}L_{n-1}=\ldots=2^{-n}L$$

حيث D و L هما على الترتيب قطر وطول محيط R ، وعليه فإن :

$$4^{-n}\left|(R)\right|\le\left|(R_n)\right|\le\varepsilon\ D_nL_n=4^{-n}\varepsilon\ DL$$

وبالتالي $\left|I(R)\right|\le\varepsilon\ DL$. وبما أن ε اختيارية ، فإننا نجد فقط أن $I(R)=0$ وبذلك يكون الإثبات قد اكتمل. ■

الخطوة التالية هي إثبات أن أي دالة تحليلية على قرص ، لها دالة أصلية تحليلية على ذلك القرص.

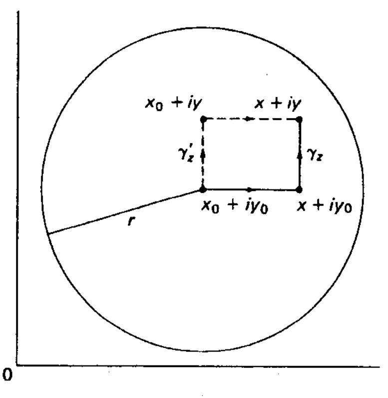
نظرية

إذا كانت $f(z)$ تحليلية في القرص $|z-z_0|<r$ فإنه توجد دالة $F(z)$ تحليلية في $|z-z_0|<r$ تحقق:

$$F'(z)=f(z)$$

البرهان

لأي نقطة في القرص $|z-z_0|<r$ لنفترض أن γ_2 القوس المكون من القطعتين المستقيمتين اللتين تربطان z_0 بالنقطة $x+iy_0$ والنقطة $x+iy_0$ بالنقطة z حيث $z=x+iy$ و $z_0=x_0+iy_0$ [انظر الشكل (٢,١٠)].



الشكل رقم (٢,١٠). الأقواس γ_z و γ_z'

لنعرف F على الشكل:

$$F(z)=\int_{\gamma_2} f(z)dz=\int_{x_0}^{x} f(t+iy_0)dt+i\int_{y_0}^{y} f(x+it)dt. \qquad (1)$$

إذا كان γ_z' القوس الذي يحوي القطعتين المستقيمتين اللتين تصلان z_0 بالنقطة x_0+iy و x_0+iy بالنقطة z. فإن $\gamma_z-\gamma_z'$ هو حدود المستطيل. وبوساطة نظرية كوشي جورساه:

$$0=\int_{\gamma_z-\gamma'_z} f(z)dz=\int_{\gamma_z} f(z)dz-\int_{\gamma'_z} f(z)dz$$

ومن الممكن أيضا حساب $F(z)$ على طول المسار γ'_z كما يلي :

$$F(z)=\int_{\gamma'_z} f(z)dz=i\int_{y_0}^{y} f(x_0+it)dt+\int_{x_0}^{x} f(t+iy)dt. \tag{2}$$

والمشتقة الجزئية للمعادلة (1) بالنسبة إلى y تعطي بالمساواة :

$$F_y(z)=i\frac{\partial}{\partial y}\int_{y_0}^{y} f(x+it)dt=if(x+iy)=if(z),$$

حيث إن التكامل الأول من (1) لا يعتمد على y. وبالمثل، بأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (2) بالنسبة إلى x تعطي $F_x(z)=f(z)$ وبالتالي $F(z)$ تحقق معادلتي كوشي ـ ريمان :

$$F_x(z)=f(z)=-iF_y(z)$$

وبما أن $f(z)$ متصلة، فإننا نحصل على الشروط الكافية لتكون الدالة $F(z)$ تحليلية في $|z-z_0|\le r$ ، وأخيرا $F'(z)=F_x(z)=f(z)$ ■

كما في التفاضل الحقيقي، فإن الفرق بين دالتين أصليتين لنفس الدالة هو مقدار ثابت. إذا كان كل من $F(z)$ و $H(z)$ دالتين أصليتين للدالة $f(z)$ فإن :

$$[F(z)-H(z)]'=f(z)-f(z)=0,$$

ومنه نجد أن $F(z)-H(z)$ مقدار ثابت وذلك باستخدام نظرية المشتقة الصفرية في القسم (١,٦).

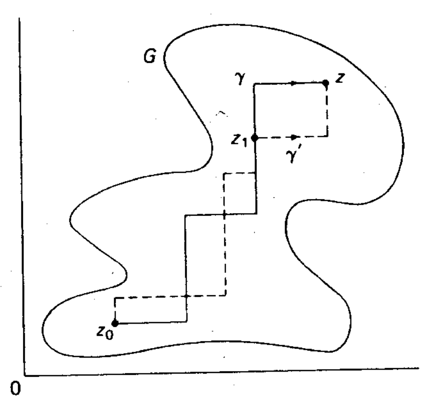
يمكن أن يعمم الإثبات في النظرية المقدمة أعلاه إلى أي منطقة بسيطة الترابط.

نظرية الدالة الأصلية (عكس التفاضل) Antiderivative theorem

لنفترض أن $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة بسيطة الترابط G. عندئذٍ توجد دالة $F(z)$ تحليلية في G ، حيث $F'(z)=f(z)$.

البرهان

لنأخذ نقطة ثابتة z_0 في G. وباستخدام النظرية على المسارات المضلعة في الفقرة (١,٣) يمكننا الحصول على مضلع أضلاعه موازية للمحاور، يصل بين z_0 وأي نقطة z من G. لنفترض أن γ و γ' مضلعان من هذه المضلعات عندئذٍ فإن $\gamma - \gamma'$ تحتوي على حدود عدد منتهٍ من مستطيلات تقع في G (يحتمل أن تكرر بعض هذه الحدود) تنتقل بالتناوب في الاتجاه الموجب والسالب (انظر الشكل رقم (٢,١١). تتطلب هذه الحقيقة إثباتا دقيقا ، بالاستفادة من أن G بسيطة الترابط ، لذلك يحذف لوضوحه. (انظر الملاحظات عند نهاية هذا الفصل) .



الشكل رقم (٢,١١). يتكون المنحنى $\gamma - \gamma'$ من حدود مستطيلات تقع في G.

بوساطة نظرية كوشي ـ جورساه :

$$0 = \int_{\gamma-\gamma'} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz - \int_{\gamma'} f(z)\,dz$$

وهكذا فإن :

$$F(z) = \int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma'} f(z)\,dz$$

مستقل عن اختيار المسار. لنفترض أن آخر قطعة مستقيمة من $\gamma(\gamma')$ أفقية (عمودية) وأن $z_1 = x_1 + iy_1$ آخر نقطة من التقاطع بين γ و γ' عندئذٍ تكون :

$$F(z) = i \int_{y_1}^{y} f(x_1 + it)\, dt + \int_{x_1}^{x} f(t + iy) + c$$
$$= \int_{x_1}^{x} f(t + iy_1)\, dt + i \int_{y_1}^{y} f(x + it)\, dt + c,$$

حيث $z = x + iy$ و $c = F(z_1)$ (مقدار ثابت) .

بالاشتقاق جزئيا، نلاحظ من المعادلة الأولى أن $F_x(z) = f(z)$ والثانية $F_y(z) = if(z)$. وبما أن $f(z)$ متصلة و $F_x(z) = -if_y$ فإن $F'(z)$ تحليلية في G و $F'(z) = f(z)$. من الضروري أن تكون G بسيطة الترابط وإلا أصبح كثير الأضلاع γ و γ' على شكل مستطيل يحوي ثقبا في داخله، وعندها لا تكون الدالة $f(z)$ تحليلية في منطقة تحوي ذلك المستطيل. وبالتالي لا يمكن تطبيق نظرية كوشي - جورساه. ■

مثال (٢,٥,١)

الدالة $f(z) = 1/z$ تحليلية في $C - \{0\}$ وتقبل $F(z) = \log z$ كدالة أصلية. إذا سرنا على النصف العلوي لدائرة الوحدة ابتداء من 1 على الفرع الرئيسي نحصل على :

$$F\left(e^{i\pi/2}\right) = \frac{i\pi}{2} \quad ,$$

بينما إذا سرنا على النصف السفلي لدائرة الوحدة نجد أن :

$$F\left(e^{-i\pi/2}\right) = \frac{-i\pi}{2} \quad .$$

وبالتالي، فإن القيمة للدالة الأصلية عند $z = -1$ في هذه الحالة تعتمد على المسار المختار.

تعطي نظرية الدالة الأصلية تبسيطا مباشرا لفرضيتي النظريتين التاليتين .

النظرية الأساسية Fundamental theorem

لنفترض أن $f(z)$ تحليلية في منطقة بسيطة الترابط G. عندئذٍ يكون لأي قوس أملس جزئيا :

$$\gamma : z = z(t) \quad , \ \alpha \leq t \leq \beta$$

يكون :

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)),$$

حيث $F(z)$ أي دالة أصلية للدالة $f(z)$ في G .

نظرية كوشي Cauchy's theorem

إذا كانت $f(z)$ تحليلية ، γ منحنى مغلق أملس جزئيا في منطقة بسيطة الترابط G فإن :

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

البرهان

إذا كانت $f(z)$ تحليلية في منطقة بسيطة الترابط G ، فإنه توجد دالة $F(z)$ تحليلية في G حيث $F' = f$ وبالتالي النظرية الأساسية تبقى في الفقرة (٢,١) صحيحة ، تقتضي أنه لأي قوس أملس جزئيا γ :

$$\gamma : z = z(t),\ \alpha \leq t \leq \beta$$

يكون :

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)),$$

إذا كان $z(\beta) = z(\alpha)$ نحصل على نظرية كوشي. ■

نعتبر الآن الخواص الموجودة للتكاملات من النوع الموجود في صيغة كوشي للتكامل.

نظرية ريمان Rieman's theorem

لنفترض أن $g(\zeta)$ متصلة على قوس أملس جزئيا γ، فإن الدالة:

$$F_n(z) = \int_\gamma \frac{g(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^n} \quad , \qquad n = 1, 2, 3, ..., ...$$

تحليلية لجميع قيم z الموجودة في متممة γ ومشتقتها تحقق:

$$F'_n(z) = n F_{n+1}(z) .$$

البرهان

اختر نقطة z_0 لا تكون على γ وقرصا $|z - z_0| < \delta$ منفصلا عن γ. من أجل نقطة z في القرص $|z - z_0| < \delta/2$ نحصل على:

$$|F_1(z) - F_1(z_0)| = \left| \int_\gamma g(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_o}\right) d\zeta \right|$$

$$\leq |z - z_0| \int_\gamma \frac{|g(\zeta)|\,|d\zeta|}{|\zeta - z|\,|\zeta - z_o|}$$

القوس γ له طول محدود L، وبالتالي يكّون مجموعة مغلقة ومحدودة من النقاط. وحسب نظرية في التفاضل والتكامل تقول بأن الدالة المتصلة ذات القيمة الحقيقية تحصل على قيمتها العظمى على أي مجموعة مغلقة ومحدودة. وعليه فإن $|g(\zeta)|$ محدودة بالعدد M على γ. حيث $|\zeta - z| > \delta/2$ لجميع ζ على γ، فإن:

$$|F_1(z) - F_1(z_0)| \leq \frac{2ML}{\delta^2} |z \quad z_0|$$

يثبت هذا اتصال الدالة $F_1(z)$ عند z_0. بتطبيق هذه الحقيقة على الدوال:

$$G_n(z) = \int_\gamma \frac{\frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)}}{(\zeta - z)^n} d\zeta,$$

نجد أن $G_1(z)$ متصلة عند z_0 حيث $g(\zeta)/(\zeta - z_0)$ متصلة على γ. وبما أن فرق خارج القسمة لـ $F_1(z)$ يساوي $G_1(z)$ فإن:

$$F_2(z_0) = G_1(z_0) = \lim_{z\to z_0} G_1(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{F_1(z) - F_1(z_o)}{z - z_o} = F_1'(z_0)$$

لنفترض أن $F_{n-1}'(z) = (n-1)\, F_n(z)$ صحيحة (وبما أن $g(\zeta)$ اختيارية وأيضا $G_{n-1}'(z) = (n-1)G_n(z)$. فإن:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_o} + \frac{z - z_o}{(\zeta - z)(\zeta - z_o)}$$

يؤدي إلى أن:

$$F_n(z) - F_n(z_0) = [G_{n-1}(z) - G_{n-1}(z_0)] + (z - z_0)\, G_n(z).$$

وبما أن $G_{n-1}(z)$ قابلة للاشتقاق، فإنها تكون متصلة، وأن:

$$|G_n(z)| = = \left| \int_\gamma \frac{g(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^n(\zeta - z_0)} \right| \le \frac{2^n ML}{\delta^{n+1}}$$

لقيم z التي تحقق $|z - z_0| < \delta / 2$. بوساطة المتراجحة(المتباينة) المثلثية:

$$0 \le \lim_{z\to z_0} |F_n(z) - F_n(z_0)| \le \frac{2^n ML}{\delta^{n+1}} \lim_{z\to z_0} |z - z_0| = 0$$

ويثبت هذا أن $F_n(z)$ (وبالتالي $G_n(z)$) تكون متصلة عند z_0، وعليه فإن

$$F_n'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \left[\frac{G_{n-1}(z) - G_{n-1}(z_0)}{z - z_0}\right] + G_n(z)$$

$$= G_{n-1}'(z_0) + G_n(z_0)$$

$$= n\, G_n(z_0) = n\, F_{n+1}(z_0).$$

ينتج البرهان الآن من الاستقراء الرياضي. ■

تعطي نظرية ريمان إثباتا لنظرية كوشي للتفاضل، والحقيقة المميزة في الدوال التحليلية لها مشتقات تحليلية.

نظرية كوشي للتفاضل (Cauchy's theorem for derivative)

لنفترض أن $f(z)$ تحليلية في منطقة بسيطة الترابط تحوي منحنى جوردان الأملس، عندئذٍ فإنه لجميع النقاط داخل γ:

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi!} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}\, dz \ , \quad n = 0, 1, 2, \ ....$$

البرهان

نضع $g(z) = f(z)$ في نظرية ريمان، فنجد أن:

$$F_1(\zeta) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz = 2\pi\, i f(\zeta)$$

وذلك باستخدام صيغة كوشي للتكامل لجميع النقاط ζ داخل γ.

بتطبيق نظرية ريمان وعلى التوالي، نحصل على:

$$F_{n+1}(\zeta) = \frac{F_n'(\zeta)}{n} = \frac{F_{n-1}''(\zeta)}{n(n-1)} = ... = \frac{F_1^{(n)}(\zeta)}{n!} = \frac{2\pi i f^{(n)}(\zeta)}{n!} \ ,$$

وعليه فإن:

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} F_{n+1}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}\, dz \ ,$$

وبالتالي نحصل على النتيجة.

بأخذ $f^{(0)} = f$ و $0! = 1$ نلاحظ أن المعادلة السابقة تختزل إلى صيغة كوشي للتكامل عندما تكون $n = 0$. ■

نتيجة

إذا كانت $f(z)$ تحليلية في المنطقة G، فإن المشتقة $f'(z)$ تكون أيضا كذلك. وأكثر من هذا فإن $f(z)$ لها مشتقات من جميع الرتب في G.

البرهان

بما أن التحليلية تحتاج إلى الإثبات في جوار نقطة. فإننا نستطيع أن نجد قرصا $|z-\zeta| \le r$ لكل ζ محتوى في G. لتكن γ الدائرة $|z-\zeta| = r$. عندئذ تكون

$f^{(n)}(\zeta)$ موجودة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n. وبالتالي فإن $f'(z)$ لها مشتقة عند ζ . وعليه فإن $f'(z)$ دالة تحليلية.

تكمل هذه النتيجة المهمة التي تبين أن الدوال التحليلية لها مشتقات تحليلية ، وتسمح بإلغاء جميع الفرضيات غير الضرورية في نصوص النظرية الأساسية ونظرية كوشي ، ونظرية موريرا التي أثبتت في الفقرات من (٢,١) إلى (٢,٣).

تمارين (٢,٥)

(١) كثيرة الحدود $L_n(z)$ (The Laguerre polynomials) تعطى بالشكل :

$$L_n(z) = e^z \frac{d^n}{dz^n} (z^n e^{-z}) .$$

بيّن أنه لجميع z داخل منحنى جوردان الأملس جزئياً γ:

$$L_n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\zeta^n e^{-(\zeta - z)}}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta .$$

(٢) استنتج صيغة واليس (Wallis's formula) :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}\theta \, d\theta = \frac{(2n)!}{(2^n \, n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

وذلك بمكاملة $f(z) = (z + 1/z)^{2n} / z$ على $|z| = 1$.

(٣) لنفترض أن $f(z)$ متصلة في المنطقة $\text{Re}\, z > \sigma$ ولنفترض أن $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ ،

أثبت أنه لجميع الأعداد السالبة t ،

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} e^{zt} f(z)\, dz = 0 ,$$

حيث $\Gamma_R = \{|z| = R\} \cap \{\text{Re}\, z \geq 0\}$.

(٤) لنفترض أن $f(z)$ تحليلية على المجموعة R^* التي يمكن الحصول عليها بإهمال عدد نهائي من النقاط الداخلية $z_1, z_2, \ldots, z_n$ للمستطيل R. أثبت أن :

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0 ,$$

بشرط أن يكون:

$$\lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = 0 .$$

لجميع قيم k حيث $k = 1, 2, \ldots, n$

(٥) لنفترض أن $f(z)$ تحليلية على المجموعة D التي يمكن الحصول عليها بإهمال النقاط $z_1, z_2 \qquad z_n$ في $|z - z_0| < r$. أثبت أن:

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$

لأي منحني مغلق γ في $|z - z_0| < r$ بشرط أن تكون:

$$\lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

(٦) أثبت أن الجملة الواردة في التمرين (٥) تبقى صحيحة عندما نحصل على D بإهمال عدد غير منته من النقاط $z_1, z_2, \ldots,$ التي ليس لها نقاط تجمع في $|z - z_0| < r$.

ملاحظات

البند (٢,١)

يوجد إثبات نظرية منحنى جوردان في [W, p. 301].

البند (٢,٤)

يمكن أن يوجد تعميم تمهيدية شوارتز في [A, p. 1361].

البند (٢,٥)

يمكن أن نثبت نظرية كوشي ـ جورساه بوضع شروط أضعف على R في [V, p. 76].أثبت أنها صحيحة لدالة $f(z)$ تحليلية داخل R ومتصلة على ∂R. التحقق في نظرية الدالة الأصلية من أن $\gamma - \gamma'$ يحتوي على حدود عدد منته من المستطيلات

يمكن إيجاده في [A, pp. 141 – 143] أو [L, pp. 128 – 131]. قدّم J.D. Dixon إثباتا لنظرية كوشي بدون التوبولوجي يمكن النظر إليه في [L, pp. 148 – 150] أو المقالة الأصلية في :
Proc. Amer. Math. Soc. 29(1971) , 625 – 626 .

يمكن الحصول على تعميم أكثر لنظرية كوشي في [A, p. 144] و[Ho, pp. 3-26] .

تكون نظرية ريمان صحيحة عندما يكون $\int_\gamma |g(\zeta)||d\zeta|<\infty$ والإثبات باستخدام فرضيات أضعف لا يتغير ويعطى بنفس الطريقة. نحصل على إثبات أن تحليلية المشتقة مستقلة عن التكامل الخطي بوساطة [W, p. 77] .

الفصل الثالث

المتسلسلات اللانهائية
INFINITE SERIES

(٣,١) متسلسلة تايلور
Taylor Series

تعريف

المتسلسلة اللانهائية للأعداد المركبة

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

تقترب من المجموع A إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية S_n حيث :

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

تحقق أن $S_n \to A$ عندما $n \to \infty$. في هذه الحالة نكتب $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$. وما عدا هذا نقول إن المتسلسلة متباعدة diverges. تسمى المتسلسلة التي تكون متسلسلة القيم المطلقة لحدودها متقاربة متسلسلة متقاربة مطلقا absolutely converges.

بما أن $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ فإذا كانت المتسلسلة متقاربة يكون :

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{n+1} - S_n) = A - A = 0$$

وعليه فإن الحد العام في متسلسلة متقاربة يقترب من الصفر. هذه الخاصية ضرورية وليست كافية كما يوضحه المثال التالي :

مثال (١ , ١ ,٣)

المتسلسلة :

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + ...$$

متباعدة والسبب أنه إذا جمعت الحدود المتساوية :

$$1+\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\right)+\ldots\ldots$$

فإن المجموع الجزئي يزداد بدون حدود.

المتسلسلة المتقاربة مطلقا يجب أن تكون متقاربة. نجد الإثبات في أي كتاب تفاضل وتكامل ولذلك يترك كواجب.

في العادة نرغب في متسلسلة لا نهائية من الدوال معرفة على منطقة G.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots. + f_n(z) + \ldots..$$

يقال إن المتسلسلة متقاربة على المنطقة G إذا كانت متقاربة عند كل نقطة z_0 في G ونكتب :

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} f_n(z)$$

ونسمي $f(z)$ مجموع المتسلسلة.

مثال (٣,١,٢)

أثبت أن المتسلسلة الهندسية geometric series $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ تتقارب إلى القيمة $\frac{1}{1-z}$ لقيم $|z|<1$.

الحل

باستخدام القسمة المطولة لكثيرة الحدود، نحصل على :

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} + \frac{z^n}{1-z} = S_{n-1} + \frac{z^n}{1-z}$$

وبما أن $|z|<1$ فإن $z^n \to 0$ عندما $n \to \infty$ ، وعليه فإن :

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z|<1$$

وسنثبت الآن أن كل دالة تحليلية يمكن كتابتها على شكل متسلسلة متقاربة لتايلور.

نظرية تايلور Taylor`s theorem

لنفترض أن $f(z)$ تحليلية في المنطقة G التي تحتوي على النقطة z_0 عندئذ فإن التمثيل :

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\ldots$$

يبقى صحيحا في جميع الأقراص $|z-z_0|<r$ المحتواة في G.

البرهان

لنفترض أن z أي نقطة في القرص المغلق $|\zeta-z_0|\le r$ المحتوي في G وباستخدام صيغة كوشي للتكامل يمكننا التعبير عن $f(z)$ على أنه تكامل على النحو التالي :

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

وبما أن :

$$\left[\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right]<1 \quad \text{و} \quad \zeta-z=(\zeta-z_0)\left[1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right]$$

نستخدم متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية لإعادة كتابة التكامل على الشكل :

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\frac{1}{\left[1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right]}\,d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \ldots + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n-1} + Q_n \right] d\zeta,$$

حيث :

$$Q_n = \frac{(z - z_0)^n / (\zeta - z_0)^n}{1 - (z - z_0)/(\zeta - z_0)} = \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z)/(\zeta - z_0)^{n-1}}$$

وباستخدام نظرية كوشي للتفاضل نحصل على :

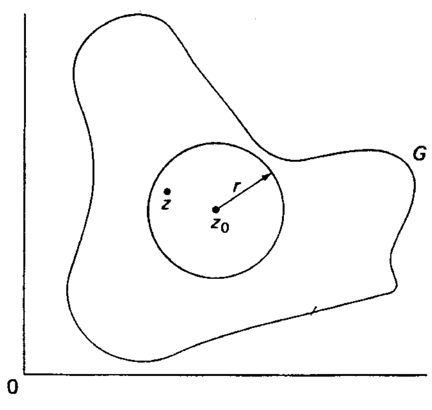
$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \frac{f'(z_0)}{1!} + \ldots + (z - z_0)^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} + R_n,$$

حيث :

$$R_n = \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^n} d\zeta$$

إذا اخترنا z داخل القرص $|\zeta - z_0| = r$ وبوضع $|z - z_0| = \rho$ مع ملاحظة أن $|\zeta - z| \geq r - \rho$ لجميع قيم ζ على $|\zeta - z_0| = r$ نحصل على :

$$|R_n| \leq \frac{\rho^n}{2\pi} \frac{2\pi\ rM}{(r - \rho)\ r^n} = \frac{rM}{r - \rho} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n,$$



الشكل رقم (٣,١). القرص $|\zeta - z_0| = r$ المحتوى في G.

حيث M القيمة العظمى للدالة $|f(\zeta)|$ على $|\zeta - z_0| = r$ (انظر الشكل رقم (٣،١)).
ولكن $\rho / r < 1$ ، وعليه فإن $R_n \to 0$ ، عندما $n \to \infty$ ، وبالتالي $f(z)$ تكون قد مثلت بوساطة متسلسلة تايلور لجميع قيم z.

تسمح هذه النظرية لنا بالحصول على متسلسلة تايلور لدوال تحليلية بنفس الطريقة المعمول بها في حساب التفاضل والتكامل العادي. فعلى سبيل المثال، إذا كان $f(z) = e^z$, فإن $f^{(n)}(z) = e^z$ و $f^{(n)}(0) = 1$ وبالتالي نحصل على متسلسلة ماكلوران : Maclaurin

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < \infty,$$

وهي صحيحة لجميع قيم z في C حيث $f(z)$ كلية.

نجد من النتائج المفيدة لنظرية تايلور النظريتين التاليتين.

نظرية

إذا كانت $f(z)$ تحليلية في المنطقة G التي تحتوي النقطة z_0 ، وكانت $f^{(n)}(z_0) = 0$ لجميع $n = 1,2,...,$ فإن $f(z)$ ثابتة في G.

البرهان

بوساطة نظرية تايلور فإن $f(z) = f(z_0)$ لجميع z في أي قرص $|\zeta - z_0| < r$ في G. لنفترض أن $g(z) = f(z) - f(z_0)$ ، وعندئذ نجد أن g تحليلية في G وأن $g^{(n)}(z) = 0, n = 0,1,2,...,$ ولجميع z في هذا القرص.

لنفترض أن S مجموعة جميع النقاط z في G التي يكون عندها $g^{(n)}(z) = 0, n = 0,1,2,...,$. لنفترض أن $T = G - S$.

إذا كـانت z_1 في S فإنـه يمكـن تمثيـل g باسـتخدام نظريـة تـايلور بحيـث يكـون $g(z)=0$ لجميع الأقـراص $|z-z_1|<r$ المحتـواة في G. وبالتـالي حسـب التعليـل الـوارد أعلاه فإن S مجموعة مفتوحة، كما أن جميع نقاطها نقاط داخلية.

إذا كـانت z_1 في T فيوجـد عـدد طبيعـي $n \geq 0$ بحيــث يكـون $g^{(n)}(z_1) \neq 0$. وبالتالي، فإن في قرص مركزه z_1 يقع داخل G، وبالتالي فإن متسلسلة تـايلور للدالـة $g(z)$ لا تنعدم، ويثبت هذا أن z_1 نقطة داخلية إلى T. وعليه، فإن T مجموعة مفتوحة. من الواضح أنه لا T ولا S تحويان نقطة حدودية مـن الأخـرى كمـا أن كليهما مجموعـة مفتوحة. وبما أن G مترابطـة فـإن T يجـب أن تكـون خاليـة، وبالتـالي فـإن $g(z)=f(z)-f(z_0)=0$ لجميع z في G. ■

تدل هذه النظرية على أنه إذا كانت الدالـة غير الثابتـة $f(z)$ تحليليـة في المنطقـة G، وتنعـدم عند نقطة z_0 في G فإنـه يوجـد عـدد صحيـح موجـب n بحيـث يكـون $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. أقل عدد تأخذه n يحدد رتبة صفر الدالة f عند z_0 ويسمح لنا بكتابة:

$$f(z)=(z-z_0)^n f_n(z) \quad و \quad f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)^n}d\zeta,$$

حيث $f_n(z)$ تحليلية داخـل القـرص $|\zeta-z_0|\leq r$ المحتـوى داخـل G وذلـك بوسـاطة نظرية كوشي للتفاضل (أو نظرية ريمان في الفقرة (٢,٥)). وفضلا على ذلك:

$$f_n(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\neq 0$$

وعليـه يوجد جوار $\varepsilon -$ للنقطة z_0 يقع داخل G لا تنعدم فيـه $f_n(z)$ لأن f_n متصلـة. ويبين هذا أن z_0 هو الصفر الوحيد للدالة f في القرص $|z-z_0|<\varepsilon$. بذلـك نكـون قد أثبتنا النظرية التالية.

نظرية

أصفار الدالة التحليلية غير الثابتة أصفار معزولة.

مثال (٣,١,٣)

أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة :

$$f(z) = (1-z)^{-2}$$

الحل

بما أن :

$$f^{(n)}(z) = (n+1)!(1-z)^{-(n+2)}, \ n = 0,1,2,...,$$

فإن :

$$f^{(n)}(0) = (n+1)!$$

و :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n, \qquad |z| < 1,$$

حيث $f(z)$ ليست تحليلية عند $z = 1$.

متسلسلة تايلور للدالة $f(z)$ حول النقطة $z_0 = -1$ هي :

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{2^{n+2}}(z+1)^n, \qquad |z| < 2,$$

حيث :

$$f^{(n)}(-1) = (n+1)!/2^{n+2}$$

مثال (٣,١,٤)

أوجد رتبة أصفار الدالة :

$$f(z) = 2z(e^z - 1)$$

عند $z = 0$.

الحل

أولا : نحسب $f^{(n)}(0)$ من أجل $n = 0,1,2,....,$

من الملاحظ أن :

$$f'(z) = 2ze^z + 2(e^z - 1), \qquad f''(z) = 2ze^z + 4e^z,$$

وأن :

$$f''(0) = 4$$

وبالتالي تكون الرتبة هي 2

وهذا واضح أيضا من متسلسلة ماكلوران للدالة $f(z)$:

$$2z(e^z - 1) = 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 2z^2\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + ...\right)$$

ويجب أن نتوخى الحذر عندما نبحث عن متسلسلة تايلور لدوال تحليلية معرفة على سطح ريمان، ويوضح المثال التالي هذه القضية.

مثال (٥, ١, ٣)

تذكر أن الدالة $\text{Log}\, z$ معرفة على سطح ريمان $\Re$ الموصوف في البند (١,٩).

لبناء متسلسلة تايلور للدالة :

$$f(z) = \text{Log}\, z$$

فإنه من الضروري تحديد الفرع الذي سنختاره. إذا أردنا البحث عن متسلسلة تايلور حول $z = 1$ نقطة على الفرع الرئيسي فنحصل على :

$$\log 1 = \text{Log} 1 = 0, \text{ و } f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,z^{-n}, n = 1,2,3,....,$$

وبالتالي :

$$\operatorname{Log} z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-z)^{n}}{n},$$

من ناحية أخـــرى ، متسلسلة تايلور حـــول $z=e^{2\pi i}$ على الفرع التالي من $\Re$ هي :

$$\log z=2\pi i-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-z)^{n}}{n},$$

حيث الدوال $f^{(n)}(z)$ تحليلية على $C-\{0\}$ و :

$$f(e^{2\pi i})=\log e^{2\pi i}=2\pi i,$$

$$f^{(n)}(e^{2\pi i})=(-1)^{n-1}(n-1)!,\qquad n=1,2,....$$

يمكن تطبيق ملاحظات مماثلة على أي فرع من $\Re$. الصيغ صحيحة في $|z-1|<1$ ، حيث إن $f^{(n)}(z)$ ليست تحليلية عند $z=0$ لقيم $n=0,1,2,...$.

مثال (٣,١,٦)

أثبت أنه لا توجد دالة تحليلية في $|z|<2$ تحقق الشرط :

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{(-1)^{n}}{n},\qquad n=1,2,3,....$$

الحل

إذا وجدت تلك الدالة فإن $F(z)=z-f(z)$ دالة ليست ثابتة وتحليلية وتحقق :

$$F\left(\frac{1}{2m}\right)=0 \text{ و } \qquad m=1,2,...$$

وبالتالي يكون $z=0$ صفرا للدالة $F(z)$ ولكنه صفر غير معزول ، وهذا يعارض النظرية الأخيرة.

تمارين (٣,١)

(١) بين أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة.

(٢) أثبت أن المتسلسلة المقاربة مطلقا تكون متقاربة.

أحصل على متسلسلة ماكلورين في التمارين من (٣) إلى (٧):

(٣) $\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad |z| < \infty$

(٤) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty$

(٥) $\sinh z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad |z| < \infty$

(٦) $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty$

(٧) $\frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}, \quad |z| < 1$

في التمارين من (٨) إلى (١٥) أوجد متسلسلة تايلور للدوال التالية حول z_0 مع ذكر أكبر قرص يكون من أجله التمثيل صحيحا.

(٨) $f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z_0 = -1$

(٩) $f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z_0 = i$

(١٠) $f(z) = \cos z, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}$

(١١) $f(z) = \sin z, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}$

(١٢) $f(z) = \frac{1}{z}, \quad z_0 = 1$

(١٣) $f(z) = \operatorname{Log} z, \quad z_0 = i$

(١٤) $f(z) = \operatorname{Log} z, \quad z_0 = -1$

(١٥) $f(z) = \operatorname{Log} z, \quad z_0 = 2e^{3\pi i}$

أوجد رتبة صفر الدالة عند $z = 0$ للدوال المعطاة في التمارين من (١٦) إلى (١٩):

(١٦) $z^2(\cos z - 1)$

(١٧) $6\sin z^2 + z^2(z^4 - 6)$

(١٨) $z - \tan z$

(١٩) $z^2 - \sinh z^2$

(٢٠) إذا كانت دالتان تحليليتين على منطقة G ، ومتساويتين على مجموعة جزئية من G التي لها نقطة تجمع في G ، فأثبت أنهما متساويتان على G.

حـدد إذا كان من الممكـن وجـود دالـة تحليليـة في $2 > |z|$ عنـد النقطـة $z=\frac{1}{n}$ حيث $n=1,2,3$ ، القيم المعطاة في التمارين من (٢١) إلى (٢٤):

(٢١) $0,1,0,-1,0,1,0,-1,....$

(٢٢) $1,0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,\frac{1}{7},0,\frac{1}{9},0,....$

(٢٣) $1,\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{4}{7},\frac{5}{9},\frac{6}{11},\frac{7}{13},\frac{8}{15},....$

(٢٤) $\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},-\frac{1}{5},.....$

(٢٥) أعط مثالا لدالتين تتفقان عند عدد لانهائي مـن النقـاط في منطقـة G ، ومـع ذلـك تكونان مختلفتين.

(٢٦) أثبت أنه إذا كانت f دالة غير ثابتة وتحليلية في G فإن مجموعة النقاط z التي تحقـق $f(z)=\alpha$ ، حيث α موجودة في C. ولا يوجد لها نقطة تجمع في G.

(٢٧) أثبت نظرية ذات الحدين binomial theorem للعدد المركب α :

$$(1+z)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1}z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}z^{2}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}z^{3}+...,|z|<1.$$

(٣,٢) التقارب المنتظم للمتسلسلات

Uniform Convergence of Series

سنثبت في هذه الفقرة عكس نظرية تايلور وهـي أن متسلسـلات القـوى المتقاربـة هي في الحقيقة دوال تحليلية في مجال تقاربها.

تعريف

المتسلسلة $f(z)=\sum_{1}^{\infty} f_n(z)$ تتقارب بانتظام على G، إذا وجد لكل $\varepsilon>0$ عدد موجب K بحيث:

$$\left|f(z)-\sum_{n=1}^{k} f_n(z)\right|<\varepsilon,$$

لكل $k>K$ ولكل z في G.

يختلف التقارب المنتظم عن التقارب العادي، ففي التقارب العادي نحتاج فقط إلى إثبات وجود الدالة الموجبة $K(z)$ حيث يتحقق لكل z_0 في G.

$$\left|f(z_0)-\sum_{n=1}^{k} f_n(z_0)\right|<\varepsilon,$$

وذلك عندما يكون $k>K(z_0)$. وتأتي الأهمية لمفهوم التقارب المنتظم من النتيجة التالية.

نظرية فيرستراس Weierstrass`s Theorem

يكون مجموع متسلسلة متقاربة بانتظام لدوال تحليلية دالة تحليلية، ويمكن اشتقاقها ومكاملتها حدا حدا.

البرهان

لنفترض أن $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ حيث كل دالة من الدوال $f_n(z)$ تحليلية في المجال G. وليكن $\varepsilon>0$ معطى، عندئذ يوجد عدد موجب K حيث:

$$\left|f(z)-\sum_{n=1}^{k} f_n(z)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

لجميع $k>K$ ولجميع قيم z في G.

لأي z_0 في G ، وثابت k $(k>K)$ يوجد δ بحيث:

$$\left|\sum_{n=1}^{k} f_n(z) - \sum_{n=1}^{k} f_n(z_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

طالما كانت z في G و $|z-z_0| < \delta$. وبما أن المجموع الجزئي متصل ؛ فباستخدام المتراجحة (المتباينة) المثلثية نجد أن :

$$\begin{aligned}|f(z) - f(z_0)| &\le \left|f(z) - \sum_{n=1}^{k} f_n(z)\right| \\ &+ \left|\sum_{n=1}^{k} f_n(z) - \sum_{n=1}^{k} f_n(z_0)\right| + \left|\sum_{n=1}^{k} f_n(z_0) - f(z_0)\right| < \varepsilon\end{aligned}$$

ما دامت z موجودة في G ، وكان $|z-z_0| < \delta$. وبالتالي فإن f متصلة في G.

بوساطة نظرية كوشي لأي منحنى أملس جزئيا γ يقع داخل قرص محتوي في G فإن :

$$\int_\gamma f_n(z)dz = 0, n = 1,2,\ldots,k$$

وعليه :

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_\gamma f(z)dz - \sum_{n=1}^{k} \int_\gamma f_n(z)dz\right|$$

$$\le \int_\gamma \left|f(z) - \sum_{n=1}^{k} f_n(z)\right||dz| < \frac{\varepsilon L}{3},$$

حيث L طول المنحنى γ.

وبما أنه يمكن جعل ε قريبة من الصفر ، فإن تعميم نظرية موريرا يكون صحيحا (تمرين (٢٣) فقرة (٢,٣)) وبالتالي تكون $f(z)$ تحليلية في G. (إذا كانت G بسيطة الترابط ، فإن ذلك ينتج من نظرية موريرا). وبشكل خاص نجد أن لأي قوس أملس جزئيا γ في G :

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)dz.$$

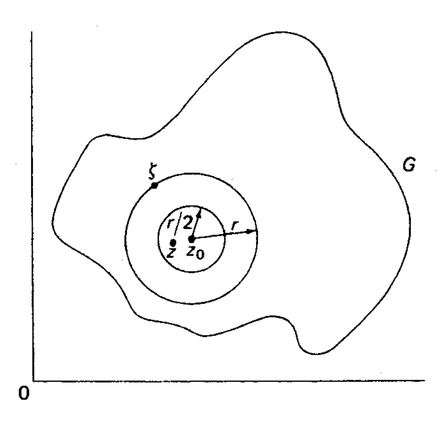
علاوة على ذلك بوساطة صيغة كوشي للاشتقاق فإن :

$$\left| f_n'(z) - \sum_{n=1}^{k} f_n'(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta) - \sum_{n=1}^{k} f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| < \frac{4\varepsilon}{3r}$$

لجميع z التي تحقق $|z - z_0| \le \frac{r}{2}$ حيث $k > K$ ومن أجل القرص $|\zeta - z_0| \le r$ المحتوى في G. (انظر الشكل رقم (٣،٢)).

وعليه، فإن المتسلسلة $\sum f_n'(z)$ تتقارب بانتظام إلى $f'(z)$ على $|z - z_0| < r/2$.

وبهذا يكون الإثبات قد اكتمل. ■



الشكل رقم (٣،٢). $|\zeta - z| > r/2$

يمكن تطبيق نظرية فيرستراس على متسلسلة القوى :

$$\sum_1^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

حيث كل حد في المتسلسلة هو دالة كلية. وقبل الشروع في هذا الاتجاه، من المفيد وضع بعض الملاحظات حول متسلسلة القوى. نلاحظ أن التعويض $\zeta = z - z_0$ يحول المتسلسلة أعلاه إلى متسلسلة القوى $\sum_1^\infty a_n \zeta^n$ ، وبالتالي سوف نعتبر متسلسلات من النوع الأخير فقط.

تذكر من حساب التفاضل والتكامل مفهوم نصف قطر التقارب R لمتسلسلة القوى $\sum_1^\infty r_n x^n$ حيث المعاملات r_n حقيقية.

العدد $0 < R < \infty$ له الخاصية بأن تتقارب المتسلسلة مطلقا عندما تكون $|x| < R$ وتتباعد عندما تكون $|x| > R$ ، ويمكن حساب R من الصيغة:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{r_n}{r_{n+1}} \right|,$$

عندما تكون النهاية موجودة.

لسوء الحظ في متسلسلة مثل:

$$2 + x + 2x^2 + x^3 + \ldots + 2x^{2k} + x^{2k+1} + \ldots,$$

فإن فيها النسبة للمعاملات $|r_n / r_{n+1}|$ تساوي على التعاقب $\frac{1}{2}$ و2؛ لذلك فإن النهاية السابقة غير موجودة. نعطي الآن صيغة يمكن أن تستعمل دائما في حساب نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى $\sum_1^\infty a_n z^n$ ونثبت أن R لها نفس السلوك كما في حالة متسلسلة القوى الحقيقة.

صيغة هادامارد Hadamard's formula

يعطى نصف قطر التقارب R لمتسلسلة القوى $\sum_1^\infty a_n z^n$ بالشكل:

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left[\mathrm{lub}(|a_n|^{1/n}, |a_{n+1}|^{1/(n+1)}, \ldots) \right]$$

الحد العلوي الأصغر (lub) إما أن يكون متناقصا أو يبقى ثابتا عندما تزداد n، ولذا فإن هذه النهاية موجودة دائما (مع اعتبار اللانهاية قيمة مقبولة).

وبما أن $2^{1/(2n)} \to 1$ عندما $n \to \infty$ فإن المتسلسلة:

$$2 + x + 2x^2 + x^3 + \ldots$$

لها نصف قطر التقارب $R = 1$.

نظرية آبل Abel's theorem

لنفترض أن R نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى $\sum_1^\infty a_n z^n$، عندئذ يكون:

(١) تتقارب المتسلسلة مطلقا عندما تكون $|z| < R$، وتتقارب بانتظام عندما تكون $|z| \le \rho$ و $\rho < R$.

(٢) المتسلسلة متباعدة $|z| > R$.

(٣) مجموع المتسلسلة يكون تحليليا عندما تكون $|z| < R$، ويمكن الحصول على مشتقتها باشتقاقها حدا حدا، ولها نفس نصف قطر التقارب.

البرهان

(١) لنفترض $|z| < r < R$ عندها $r^{-1} > R^{-1}$ وبالتالي فإن تعريف نهاية أصغر حد علوي يقتضي وجود عدد طبيعي N بحيث إن $|a_n| < r^{-n}$ لجميع $n > N$ وبالتالي:

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n||z|^n < \sum_{n=N}^{\infty} \left|\frac{z}{r}\right|^n = \frac{\left|\frac{z}{r}\right|^N}{1 - \left|\frac{z}{r}\right|},$$

وذلك بوساطة المتسلسلة الهندسية مثال (٣,١,٢)، الفقرة (٣,١) حيث $|z/r|<1$ ولهذا فإن المتسلسلة تتقارب مطلقا عندما تكون $|z|<r$ لأي $r<R$ وبالتالي لأي $|z|<R$.

لإثبات التقارب المنتظم نختار $|z|\le\rho<r<R$ بوساطة ما تم أعلاه والمتراجحة (المتباينة) المثلثية فإن:

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}a_n z^n\right|\le\sum_{n=N}^{\infty}|a_n||z|^n=\frac{\left(\frac{\rho}{r}\right)^N}{1-\left(\frac{\rho}{r}\right)},$$

لجميع $k\ge N$ و $|z|\le\rho$.

(٢) إذا كان $|z|>r>R$ ، فإن $r^{-1}<R^{-1}$ فتعريف نهاية أصغر حد علوي يسمح بوجود عدد غير منته من الأعداد الصحيحة n التي تحقق $|a_n|>r^{-n}$.

وبالتالي فإن عدد غير منته من حدود المتتالية يحقق:

$$|a_n z^n|>|z/r|^n$$

وعليه تكون غير محدودة.

(٣) بما أن المجموع تحللي عندما $|z|<R$ فإنه يمكن الحصول على مشتقته باشتقاق كل حد وهذا ناتج من نظرية فيرستراس.

وأخيرا لنضع $\sqrt[n]{n}=1+c_n$ فإنه ينتج من نظرية ذي الحدين:

$$n=(1+c_n)^n>1+\frac{n(n-1)}{2}c_n^2$$

ومنه نجد أن $c_n^2<2/n$ وبالتالي $c_n\to 0$ عندما يكون $n\to\infty$ ونحسب نصف قطر تقارب المشتقة $\sum_{n=1}^{\infty}na_n z^{n-1}$ بملاحظة أن:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}$$
$$\le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

مثال (٣,٢,١)

لنأخذ المتسلسلة:

$$1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots,$$

نلاحظ أن $|a_n|$ منعدمة لكل n الفردية وتساوي 1 عندما تكون n زوجيا. وبالتالي $R = 1$ ويعني هذا أن المتسلسلة متقاربة مطلقا عندما يكون $|z| < 1$ ، ومتقاربة بانتظام عندما يكون $|z| \le r < 1$ ، ومتباعدة عندما $|z| > 1$. علاوة على ذلك فهي تمثل دالة تحليلية عندما يكون $|z| < 1$ ولا نتمكن من قول شيء عندما $|z| = 1$. على كل حال، لاحظ أنها تتباعد عندما يكون $|z| = 1$ لأن حدها العام لا ينتهي إلى الصفر.

بتطبيق مثال (٣,١,٢) البند (٣,١) نجد أن:

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots, |z| < 1$$

لاحظ أن المتسلسلة تحليلية فقط في القرص $|z| < 1$ ، بينما الدالة $(1+z^2)^{-1}$ تحليلية في كل مكان من C باستثناء $z = \pm i$. يمكننا مكاملة المتسلسلة بمكاملة كل حد على أي مسار داخل دائرة الوحدة فنجد:

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots, |z| < 1$$

حالة خاصة، الدالة:

$$f(z) = \frac{1}{z}\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = 1 - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots, 0 < |z| < 1$$

$$f(0) = 1$$

وتحليلية عندما يكون $|z|<1$ ، ويقدم هذا طريقة مفيدة لبيان التحليلية.

مثال (٢, ٢, ٣)

أوجد نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى:

$$\text{(ا)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \qquad \text{(ب)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \qquad \text{(جـ)}\ \sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n!}$$

الحل

$$\text{(ا)}\quad \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

يقترب من 1 عندما $n\to\infty$ وذلك بالاستفادة من برهان نظرية آبل. وبالتالي $R=1$ للمتسلسلة في (ا). لاحظ أنه يمكن الحصول على هذه النتيجة باستخدام صيغة النسبة لنصف قطر التقارب.

(ب) من الأسهل استخدام صيغة النسبة:

$$\left|\frac{r_n}{r_{n+1}}\right|=\frac{(n+1)!}{n!}=n+1\to\infty,\qquad n\to\infty$$

عندما $n\to\infty$ فنجد أن $R=\infty$.

(جـ) لا يمكن استخدام صيغة النسبة هنا لأنه يوجد عدد لا محدود من الأصفار كمعاملات.

هنا $R=1$ وذلك لأن:

$$(2^n)^{1/n!}=e^{\ln 2/(n-1)!}\to e^0=1,\qquad n\to\infty,$$

وتنعدم جميع الحدود الأخرى.

مثال (٣, ٢, ٣)

أوجد الحل التحليلي للمعادلة التفاضلية :

$$f''(z) - 2zf'(z) - 2f(z) = 0$$

وفقا للشروط البدائية $f(0) = 1$ و $f'(0) = 0$.

الحل

باشتقاق المتسلسلة :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, a_0 = 1$$

مرتين نحصل على :

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots + na_n z^{n-1} + \ldots, a_1 = 0$$

$$f''(z) = 2a_2 + 6a_3 z + \ldots + (n+2)(n+1)a_{n+2} z^n + \ldots$$

وعليه فإن :

$$f''(z) - 2z\ f'(z) - 2f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_n] z^n = 0$$

وبالتالي :

$$(n+1)\ [(n+2)a_{n+2} - 2a_n] = 0,\ \ n = 0,\ 1,\ 2$$

من المعادلة :

$$a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+2}$$

نجد أن الحل العام التحليلي للمعادلة التفاضلية على الشكل :

$$f(z) = a_0(1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \ldots) + a_1 z\left(1 + \frac{1}{3!}(2z)^2 + \frac{2}{5!}(2z)^4 + \frac{5}{7!}(2z)^6 + \ldots\right)$$

وبما أن $a_0 = 1$ و $a_1 = 0$ ، فإننا نحصل على الدالة الكلية :

$$f(z) = 1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \ldots = e^{z^2}$$

كحل تحليلي لمسألة القيمة البدائية.

تمارين (٣,٢)

أوجد نصف قطر التقارب للمتسلسلة المعطاة في التمارين من (١) إلى (٦):

(١) $\sum_{n=1}^{\infty}(nz)^n$ (٢) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,z^n}{n^n}$

(٣) $\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}$ (٤) $\sum_{n=1}^{\infty}z^{n!}$

(٥) $\sum_{n=0}^{\infty}[2+(-1)^n]^n z^n$ (٦) $\sum_{n=0}^{\infty}(\cos in)z^n$

إذا كان نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ هو R $(0 < R < \infty)$ فأوجد نصف قطر التقارب للمتسلسلات المعطاة في التمارين من (٧) إلى (١٢):

(٧) $\sum_{n=0}^{\infty}n^k a_n z^n$ (٨) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}a_n z^n$

(٩) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^k z^n$ (١٠) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n+k}$

(١١) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n^n z^{n^2}$ (١٢) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{n^2}$

في التمارين من (١٣) إلى (١٦) اكتب الدوال كمتسلسلات قوى مركزها عند 0، وأوجد نصف قطر تقاربها بدون استخدام نظرية تايلور:

(١٣) $\frac{2}{(1-z)^3}$ (١٤) $\text{Log}\ (1+z)$

(١٥) $\int_0^z \frac{\sin z}{z}\,dz$

(١٦)
$$f(z)=\begin{cases}\frac{e^{az}-1}{z}, & z\neq 0\\ a, & z=0\end{cases}$$

(١٧) أوجد أعم متسلسلة قوى (تحتوي على ثابتين اختياريين) تحقق المعادلة التفاضلية :

$$f''(z) + f(z) = 0$$

ثم عبر عن المجموع في صيغ دالتين بسيطتين.

(١٨) أوجد متسلسلة ماكلورين التي تحقق المعادلة التفاضلية :

$$f''(z) = 1 + zf(z)$$

وفقا للشرط البدائي : $f(0) = 0$. ما هو نصف قطر تقاربها؟.

(١٩) أوجد متسلسلة ماكلورين العامة التي تكون حلا للمعادلة التفاضلية :

$$zf''(z) + f'(z) + zf(z) = 0$$

ثم بين أنها كلية.

(**إرشاد**: أثبت أن $\sqrt[n]{n!} \to \infty$ عندما $n \to \infty$ حيث e^z كلية).

(٢٠) أوجد متسلسلة ماكلورين العامة التي تكون حلا للمعادلة التفاضلية :

$$(1 - z^2)\ f''(z) - 2z\, f'(z) + n(n+1) f(z) = 0$$

(٢١) لنفترض أن $f(z)$ و$g(z)$ دوال تحليلية في جوار z_0 و$f(z_0) = g(z_0) = 0$ بينما $g'(z_0) \neq 0$ ، أثبت نظرية لوبيتال :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

(٢٢) أعد حل التمرين (٢) في البند (٢,٤) باستعمال أسلوب هذا البند.

(٢٣) أوجد المجموع في القرص $|z| < 1$ للمتسلسلة :

$$\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)z + \sin\left(\frac{6\pi}{3}\right)z^2 + \ldots$$

(٢٤) أثبت اختبار النسبة :

إذا كان :
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R,$$
فإن R هي نصف قطر التقارب للمتسلسلة : $\sum a_n z^n$.

في التمارين من (٢٥) إلى (٢٧) لنفترض أن $g(t)$ دالة مركبة متصلة على $0 \le t \le 1$ ولنعرف :
$$f(z) = \int_0^1 g(t)e^{zt}\,dt.$$

(٢٥) أثبت أنه من أجل قيمة ثابتة للعدد z فإن المتسلسلة :
$$g(t)e^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n t^n g(t)}{n!}$$
متقاربة بانتظام على $0 \le t \le 1$.

(٢٦) أثبت أن $f(z)$ دالة كلية.

(**إرشاد**: استخدم التمرين (٢٥) لتبديل المجموع والتكامل).

(٢٧) أثبت أن :
$$f'(z) = \int_0^1 tg(t)e^{zt}\,dt$$

(٢٨) لنفترض أن $g(t)$ متصلة على $0 \le t \le 1$ ولنعرف :
$$f(z) = \int_0^1 g(t)\sin(zt)\ \ dt$$
أثبت أن $f(z)$ دالة كلية وأوجد مشتقتها.

(٢٩) لنفترض أن $g(t)$ متصلة على $0 \le t \le 1$ ولنعرف :
$$f(z) = \int_0^1 \frac{g(t)}{1 - zt}\,dt, \qquad |z| < 1.$$

أثبت أن $f(z)$ تحليلية في القرص $|z| < 1$ وأوجد مشتقتها

(٣٠) استخدم متسلسلة ماكلورين لحل المعادلة الدالية :

$$f(z^2) = z + f(z)$$

أين تكون هذه المتسلسلة متقاربة؟

(٣, ٣) متسلسلة لورانت

Laurent Series

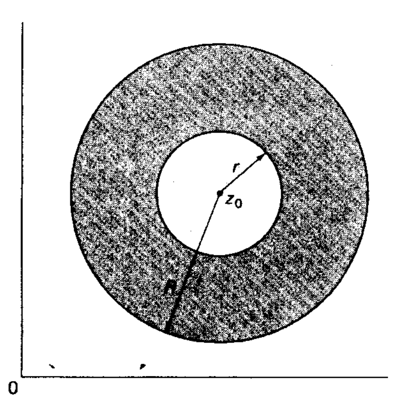
يمكن اعتبار المتسلسلة التي على الشكل :

$$a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + \ldots$$

متسلسلة قوى في المتغير $\frac{1}{z}$. إذا كان R نصف قطر تقاربها ، فإن المتسلسلة ستتقارب مطلقا عندما يكون $\left|\frac{1}{z}\right| < R$ أو $\frac{1}{R} < |z|$. ويكون التقارب منتظما على كل منطقة $|z| \geq \rho$ حيث $\frac{1}{R} < \rho$ ، وتكون متباعدة عندما يكون $|z| < \frac{1}{R}$. وبالتالي فإن المتسلسلة تمثل دالة تحليلية في $|z| > \frac{1}{R}$. بجمع متسلسلة من النوع المذكور أعلاه مع متسلسلة قوى عادية ، نحصل على متسلسلة من النوع :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

بفرض أن الجزء العادي متقارب على المنطقة $|z| < R$ ، والجزء الآخر متقارب على المنطقة $|z| > r$. إذا كان $r < R$ ، فإنه توجد حلقة مفتوحة : $r < |z| < R$ تكون عليها المتسلسلة الناتجة متقاربة ، (انظر الشكل رقم (٣.٣)).



الشكل رقم (٣, ٣). منطقة تقارب لمتسلسلة لورانت حولz_0

تمثل المتسلسلة دالة تحليلية على تلك الحلقة. وبالمثل فإن:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

تمثل دالة تحليلية على الحلقة $R > |z - z_0| > r$. ونسمي تمثيلا من هذا النوع بمتسلسلة لورانت. وعلى النقيض من ذلك، سنثبت الآن أن دالة تحليلية على الحلقة $R > |z - z_0| > r$. يمكن أن تكتب على شكل متسلسلة لورانت.

نظرية لورانت Laurent's theorem

إذا كانت $f(z)$ تحليلية في داخل الحلقة $R > |z - z_0| > r$، فإنه بالإمكان كتابتها بشكل وحيد كمتسلسلة لورانت:

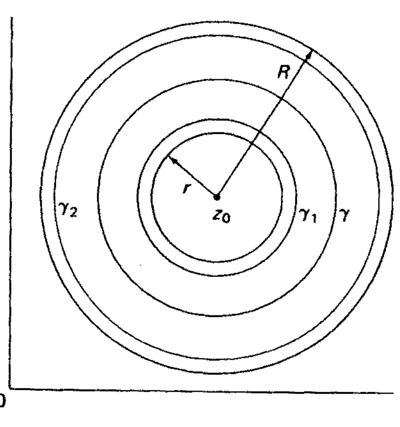
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

حيث:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad r < \rho < R.$$

البرهان

لنرمز للدائرتين $|z-z_0|=r+\varepsilon$ و $|z-z_0|=R-\varepsilon$ بالرمزين γ_1 وγ_2 على الترتيب، حيث $0<\varepsilon<\frac{R-r}{2}$ (انظر الشكل رقم (٣,٤)).



الشكل رقم (٣,٤).

باستخدام صيغة كوشي للتكامل فإن:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},$$

لجميع قيم z التي تحقق:

$$r+\varepsilon<|z-z_0|<R-\varepsilon$$

تعطي نظرية ريمان (أو نظرية كوشي ونظرية كوشي للتفاضل) تحليلية التكاملين على متممتي المنحنيين γ_1 وγ_2. كما في إثبات نظرية تايلور، فإن التكامل الأول يصبح:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)\ d\zeta}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

حيث: $$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}},\qquad n=0,1,2,\ldots$$

نلاحظ ، بالنسبة للتكامل الثاني ، وباستخدام المتسلسلة الهندسية (مثال ٣,١,٢ بند (٣,١) أن :

$$\frac{-1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z-z_0)-(\zeta - z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n,$$

حيث $|\zeta - z_0| < |z - z_0|$ على γ_1 .

إضافة إلى هذا ، تتقارب المتسلسلة بانتظام في ζ لكل ζ في γ_1. وباستخدام نظرية فيرستراس يمكن المكاملة حدا فحدا لنحصل على :

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(z-z_0)^{-(n+1)}.\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f(\zeta)(\zeta - z_0)^n\,d\zeta\right\}$$

وعليه نستنتج :

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}a_{-n-1}(z-z_0)^{-n-1}$$

حيث :

$$a_{-n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^n}$$

وأخيرا ، وبما أن $f(\zeta)/(\zeta - z_0)^{n+1}$ تحليلية داخل وعلى $\gamma - \gamma_1$ أو داخل وعلى $\gamma_2 - \gamma$ حيث γ هي الدائرة :

$$|\zeta - z_0| = \rho, \qquad r < \rho < R$$

وحسب نظرية كوشي فإنه يمكن استبدال γ_1 أو γ_2 بالدائرة γ عند حساب المعاملات a_n.

لاحظ أنه يمكن اختيار ε ليكون قريبا من الصفر ، مما يعطي التمثيل المطلوب على الحلقة : $r < |z - z_0| < R$. ■

يكون التمثيل بمتسلسلة لورانت لدالة معطاة وحيدا. فلو كان للدالة $f(z)$ تمثيلان :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(z-z_0)^n,$$

فإنه بالضرب في المقدار $(z-z_0)^k$ حيث k أي عدد طبيعي ، ثم بأخذ التكامل على : $|z - z_0| = \rho$ فإن التقارب المنتظم يعطي :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \ . \ \int_\gamma (z-z_0)^{n+k}\, dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \ . \ \int_\gamma (z-z_0)^{n+k}\, dz.$$

بما أن جميع القوى في $(z-z_0)$ ماعدا $(z-z_0)^{-1}$ لها دالة أصلية تحليلية في : $r < |z-z_0| < R$ ، فإن تكاملاتها تنعدم حسب النظرية الأساسية ، وبالتالي :

$$2\pi i\ a_{-k-1} = 2\pi i\ b_{-k-1}$$

ويعطي هذا $a_k = b_k$ لجميع الأعداد الطبيعية k.

ليس من العادة إيجاد المعاملات a_n باستخدام الصيغ التكاملية لها. سنعطي أمثلة لطرق أخرى لتفادي استخدام أمثال هذه الحسابات.

مثال (١ ,٣ ,٣)

باستخدام متسلسلة ماكلورين للمقدارين $\cos z$ و e^z نحصل على :

$$\frac{\cos z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{(2n-2)!}, \qquad 0 < |z| < \infty,$$

$$e^{1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-2n}}{n!} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^{2n}}{(-n)!}, \qquad 0 < |z|,$$

مثال (٢, ٣, ٣)

لنعتبر الدالة $(z^2 \quad 3z+2)^{-1}$ وهي تحليلية دوما باستثناء $z = 1 , 2$. أوجد متسلسلة لورانت على كل من المناطق التالية :

(ا) $1 < |z| < 2$ (جـ) $|z| > 2$

(ب) $|z| < 1$ (د) $0 < |z-1| < 1$

الحل

(ا) على الحلقة $1 < |z| < 2$. بكتابة :

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1},$$

ويمكن فك الكسور على الشكل :

$$\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} - \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

حيث $|z/2| < 1$ و $|1/z| < 1$ وعليه فإن :

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

(ب) عندما يكون $|z| < 1$ يمكن فك التعبير على النحو :

$$\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

وبالتالي :
$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n, \quad |z|<1$$

(جـ) نلاحظ أن :

$$\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}}-\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)z^n, \quad 2<|z|$$

(د) على الحلقة $0<|z-1|<1$ ، نحصل على :

$$\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}$$

$$=-\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

وبالتالي على الحلقة $0<|z-1|<1,$ يكون :

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1-(z-1)}=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

تمارين (٣، ٣)

أوجد متسلسلة لورانت للدالة $(z^2+z)^{-1}$ في المناطق المعطاة في التمارين من (١) إلى (٣) :

(١) $0<|z|<1$ (٢) $0<|z-1|<1$ (٣) $1<|z-1|<2$

مثّل الدالة $(z^3-z)^{-1}$ كمتسلسلة لورانت في المناطق المعطاة في التمارين من (٤) إلى (٧):

(٤) $0<|z|<1$ (٥) $1<|z|$

(٦) $0<|z-1|<1$ (٧) $1<|z-1|<2$

أوجد متسلسلة لورانت للدالة $\dfrac{z}{z^2+z-2}$ في المناطق المعطاة في التمارين من (٨) إلى (١٣):

(٨) $|z|<1$ (٩) $0<|z-1|<3$

(١٠) $0<|z+2|<3$ (١١) $1<|z|<2$

(١٢) $|z|>2$ (١٣) $|z+2|>3$

مثّل الدوال في التمارين من (١٤) إلى (١٧) كمتسلسلة لورانت في المنطقة $0<|z|\infty$:

(١٤) $ze^{\frac{1}{z}}$ (١٥) $e^{z+(1/z)}$

(١٦) $\sin z\sin\dfrac{1}{z}$ (١٧) $\sin\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$

أوجد متسلسلة لورانت للدوال المعطاة في التمارين من (١٨) إلى (٢١) في المنطقة $0<|z-1|<1$.

(١٨) $\dfrac{1}{z-1}\sin\dfrac{1}{z}$ (١٩) $\dfrac{1}{z}\sin\dfrac{1}{z-1}$

(٢٠) $\sin\dfrac{1}{z(z-1)}$ (٢١) $z\sin\dfrac{1}{z}$

(٢٢) لنفترض أن $f(z)$ تحليلية محدودة بالعدد M في الحلقة $r<|z-z_0|<R$ ، أثبت أن معاملات متسلسلة لورانت تحقق:

$$| a_n | \le MR^{-n}, \qquad | a_{-n} | \le Mr^n, \qquad n = 0,1,2,....$$

افترض أن $r = 0$. فهل يمكن أن تعرف $f(z)$ بطريقة بشرط أن تكون $f(z)$ تحليلية في $| z - z_0 | < R$ ؟

(٢٣) في دالة بسل (Bessel's function) $J_n(z)$ المعرفة كمعامل نوني $(n \ge 0)$ لمتسلسلة لورانت للدالة :

$$e^{(z/2)(\zeta - 1/\zeta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\zeta^n$$

أثبت أن :

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta)\,d\theta$$

(٢٤) مستخدما معاملات متسلسلة لورانت للدالة $e^{\frac{1}{z}}$ في $|z| > 0$ ، أثبت أن :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta - n\theta)\,d\theta = \frac{1}{n!}, \qquad n = 0,1,2,....$$

(**إرشاد**: كامل على $|z| = 1$) .

(٢٥) احسب التكامل :

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta)^m \cos n\theta\, d\theta,$$

m و n أعداد صحيحة ، بمقارنة المعاملات لمتسلسلة لورانت للدالة $\left(z + \frac{1}{z}\right)^m$ مع مفكوكها ككثيرة حدود.

(٢٦) أوجد متسلسلة لورانت للدالة : $\csc z$ في

$$\pi < | z | < 2\pi$$

(٣,٤) النقاط الشاذة المعزولة (الشواذ المعزولة)

(Isolated Singulaities)

إذا كانت دالة $f(z)$ تحليلية في المنطقة $0 < |z - z_0| < R$ ، ولكنها غير تحليلية أو غير معرفة عند z_0 فيقال أن لها نقطة شاذة معزولة عند z_0 ، تصنف هذه النقاط الشاذة

إلى ثلاثة أنواع :

١- النقاط الشاذة القابلة للإزالة، وهي النقاط التي يمكن معها تعيين عدد مركّب للمقدار $f(z_0)$ بطريقة ما ، وتصبح $f(z)$ تحليلية في $|z - z_0| < R$. ومن الضروري في هذه الحالة أن تكون $f(z) \to A(\neq \infty)$ عندما $z \to z_0$. ولكن إذا كانت $f(z)$ تحليلية أيضا على $0 < |z - z_0| < \frac{R}{2}$ ، ومتّصلة على $|z - z_0| \leq \frac{R}{2}$ فمن مبدأ القيمة العظمى نجد أن $f(z)$ محدودة على $|z - z_0| \leq \frac{R}{2}$.

باستخدام تقدير كوشي ، أو باستخدام التمرين (٢٢) من البند (٣.٣)، نجد أن متسلسلة لورانت للدالة $f(z)$ تصبح متسلسلة تايلور المتقاربة. وعليه تكون دالة تحليلية في $|z - z_0| < R$ ، وبالتالي فإن وجود النهاية يكون ضروريا وكافيا لضمان أن تكون النقطة الشاذة قابلة للإزالة .

٢ – تحدث الأقطاب عندما $f(z) \to \infty$ كلما $z \to z_0$. لاحظ في هذه الحالة أن الدالة $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ لها نقطة شاذة قابلة للإزالة عند z_0 مع $g(z_0) = 0$ و z_0 صفر معـــزول للدالة $g(z)$ ، حيـــث $f(z)$ ليست صفرية ومحدودة على المجمـــوعة $0 < |z - z_0| < r \leq R$.

إذا كانت n رتبة صفر الدالة $g(z)$ عند z_0 و $g(z) = (z - z_0)^n g_n(z)$ ، فإن $f(z) = (z - z_0)^{-n} f_n(z)$ ، حيث $f_n(z) = \frac{1}{g_n(z)}$ دالة تحليلية في $|z - z_0| < r$. تسمى n رتبة القطب للدالة f عند z_0 .

بالإضافة إلى هذا تكون متسلسلة لورانت للدالة $f(z)$ التي مركزها عند z_0 مساوية لحاصل ضرب $(z - z_0)^{-n}$ في متسلسلة تايلور للدالة $f_n(z)$ عند z_0 ، وعليه فإنها تكون على الشكل :

$$\sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \qquad a_{-n} \neq 0$$

بما أن $g(z)$ دالة تحليلية ليست ثابتة في $|z-z_0|<r$ ، فإن رتبة صفر الدالة g عند z_0، يجب أن تكون محدودة. وبالتالي يجب أن تكون رتبة قطب الدالة f عند z_0 محدودة أيضا.

٣- النقاط الشاذة الأساسية، وهي جميع النقاط الشاذة المعزولة التي تكون غير قابلة للإزالة أو تكون أقطابا. وفي هذه الحالة $f(z)$ لا يوجد لها نهاية عندما $z \to z_0$ وعدد غير محدود من المعاملات a_{-n} حيث $n = 1, 2, 3, \ldots$ لمتسلسلة لورانت للدالة $f(z)$ حول z_0 لا تنعدم وإلا فإن z_0 تكون قطبا أو نقطة شاذة قابلة للإزالة .

نقدم فيما يلي بعض الأمثلة لتوضيح التعاريف السابقة :

لاحظ أن :

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots$$

لها نقطة شاذة قابلة للإزالة عند $z=0$ ، وبالتالي فإن :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

تكون دالة كليّة. من جهة أخرى فإن :

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \ldots.$$

لها قطب من الرتبة 2 عند $z=0$ ، وأخيرا :

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots$$

لها نقاط شاذة فعلية عند $z=0$.

يطبّق مفهوم النقاط المعزولة على دوال (وحيدة القيمة) $f(z)$ تحليلية في جوار $R<|z|<\infty$ للمقدار ∞. بالاتفاق نصنف النقطة الشاذة المعزولة عند ∞ حسب كون

الدالة $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ لها نقطة شاذة قابلة للإزاحة أو قطب أو نقطة شاذة فعلية عند $z = 0$.

وليس من الضروري أن تكون النقاط الشاذة معزولة ، فعلى سبيل المثال :

$$f(z) = \left(\sin\frac{1}{z}\right)^{-1}$$

لها نقاط شاذة عند $z = (\pi n)^{-1}$ لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n وبالتالي فإن $z = 0$ ليست نقطة شاذة معزولة.

تعريف

تسمى الدالة التحليلية في المنطقة G باستثناء أقطابها بالدالة الميرومورفية (Meromorphic).

إذا كان كل من $f(z)$ و $g(z)$ تحليليا في G و$g(z)$ لا يساوي الصفر ، فإن النقاط الشاذة للكسر $\frac{f(z)}{g(z)}$ هي نفسها أصفار $g(z)$ وتكون أقطابا عندما تكون $f(z)$ لا تساوي الصفر أو رتبة أصفارها أقل من رتبة أصفار الدالة $g(z)$. وإلا فإنها تكوّن نقاطا شاذة قابلة للإزالة .

بإيجاد مفكوك $\frac{f(z)}{g(z)}$ ، باستخدام الاتّصال عند النقاط الشاذة القابلة للإزالة ، نحصل على دالة ميرومورفية في G . فعلى سبيل المثال الدالة :

$$f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

دالة ميرومورفية في C ولها أقطاب عند :

$$z = (k \qquad \pi\ , \ k = 0\ ,\ +1\ ,\ +2\ ,\ \ldots.$$

وأن $z = \infty$ هي نقطة تجمع لهذا الأقطاب.

يكون سلوك دالة في جوار -ϵ لنقطة شاذة فعلية معقّدا جدا وتوضح النتيجة التالية ذلك.

نظرية فيرستراس – كاسورتا (Weierstrass - Casorati theorem)

تقترب دالة تحليلية من أي قيمة معطاة قربا كافيا في داخل أي جوار -ϵ لنقطة شاذة فعلية.

البرهان

إذا كانت النظرية غير صحيحة فبالإمكان إيجاد عدد مركّب A ، $0 < \delta$ حيث $|f(z) - A| > \delta$ في كل جوار $0 < |z - z_0| < \epsilon$ للنقطة الشاذة الفعلية z_0 .

وبالتالي فإن :

$$\left|\frac{f(z) - A}{z - z_0}\right| > \frac{\delta}{|z - z_0|} \to \infty \quad \text{عندما} \quad z \to z_0$$

يؤدي هذا إلى أن :

$$g(z) = [f(z) - A] / (z - z_0)$$

لها قطب عند z_0 . وبالتالي فإن $g(z)$ ميرومورفية في $|z - z_0| < \epsilon$. كما تكون أيضا :

$f(z) = A + (z - z_0)\, g(z)$ ميروفورفيه ،

وهذا يعارض الفرض من أن z_0 نقطة شاذة فعلية. ■

في الحقيقة يمكن إثبات أكثر من هذا بالرغم من أن البرهان صعب وسوف لا يعطى هنا.

نظرية بيكارد (Picard's theorem)

تأخذ الدالة التحليلية في جوار ـ ϵ للنقطة الشاذة الأساسية ، كل عدد مركّب ، عددا غير منته من المرات باستثناء عدد مركب واحد على الأكثر.

مثال (٣,٤,١)

أوجد وصنّف النقاط الشاذة للدوال:

$$h(z) = \csc z. \text{ (جـ)} \qquad g(z) = e^{-1/z^2} \text{ (ب)} \qquad f(z) = \frac{z}{z^2 + z} \text{ (أ)}$$

الحل

(أ) تحدث النقاط الشاذة عند أصفار المقام، وهي $z = 0, -1$. وبما أن هذه الأصفار بسيطة، والبسط صفر بسيط عند $z = 0$، فإن $f(z)$ لها نقطة شاذة قابلة للإزالة عند $z = 0$، ولها قطب بسيط عند $z = -1$.

(ب) لاحظ أن $g(z) \to 1$ عندما $z \to \infty$ لأن $\frac{1}{z^2} \to 0$ وبالتالي فإن $g(z)$ لها نقطة شاذة قابلة للإزالة عند $z = \infty$، ولكن:

$$g(z) = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^4} - \dots$$

هي متسلسلة لورانت للدالة $g(z)$ التي مركزها عند $z = 0$، وبالتالي فإن $g(z)$ لها نقطة شاذة فعلية عند $z = 0$.

(جـ) بما أن:

$$\sin z = (-1)^k \sin(z - \pi k) = (-1)^k \left[(z - \pi k) - \frac{(z - \pi k)^3}{3!} + \dots \right],$$

فإن $h(z)$ لها قطب بسيط عند $z = \pi k$ و $k = 0, +1, +2, \dots$ ولها نقطة تجمع للأقطاب عند $z = \infty$.

مثال (٣,٤,٢)

أثبت أن $\sin z$ تأخذ جميع قيم C في أي جوار للعدد ∞.

الحل

تقع صورة أي شريط $(2n-1)\ \pi/2 < \chi < (2n+1)\ \pi/2$ من C على C وفقا للدالة $\omega = \sin z$.

وبما أنه يمكن إيجاد عدد لا نهائي من هذه الأشرطة تقع دائما في $|z| > R$ لكل عدد حقيقي R ، فإن $\sin z$ تأخذ جميع قيم C في كل جوار للعدد ∞ .

تمارين (٣,٤)

أوجد لكل دالة في التمارين من (١) إلى (٦) النقاط الشاذة وصنّفها؟

(١) $\dfrac{z}{z^3+z}$ (٢) $\dfrac{e^z}{1+z^2}$

(٣) $z\,e^{\frac{1}{z}}$ (٤) $\chi\ \ e^{z-\frac{1}{z}}$

(٥) $\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}$ (٦) $e^{\tan\frac{1}{z}}$

(٧) أوجد دالة لها نقطة شاذة قابلة للإزالة عند $z = -1$ ، ولها قطب من الرتبة 3 عند $z = 0$، ولها نقطة شاذة فعلية عند $z = 1$. ثم أوجد متسلسلة لورانت لها في $0 < |z| < 1$.

بيّن أن لكل دالة من الدوال المراد مكاملتها في التمارين من (٨) إلى (١١) نقطة شاذة قابلة للإزالة عند $z = 0$. ثم أزل النقطة الشاذة وأوجد متسلسلة ماكلورين لكل تكامل :

(٨) $Si(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{\sin\zeta}{\zeta}\,d\zeta$ (٩) $C(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{\cos\zeta - 1}{\zeta}\,d\zeta$

(١٠) $E(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{e^{\zeta} - 1}{\zeta}\,d\zeta$ (١١) $L(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{Log(1+\zeta)}{\zeta}\,d\zeta$

(١٢) أثبت أن $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ تأخذ جميع القيم ما عدا الصفر في أي جوار - $\in$ للنقطة $z=0$.

(١٣) أثبت أن أي دالة كلية ليس لها نقطة شاذة فعلية عند ∞ يجب أن تكون دالة كثيرة حدود. ما نوع النقطة الشاذة للدالة e^z ، $\sin z$ و $\cos z$ عند $z=\infty$؟

(١٤) أثبت أن الدالة الميرومورفية في m يجب أن تكون كسرا بسطه ومقامه كثيرة حدود.

(١٥) أثبت أن أي دالة كلية لا تساوي 0 و 1 يجب أن تكون دالة ثابتة.

(**إرشاد**: استخدم نظرية بيكارد).

(٣,٥) الامتداد التحليلي (اختياري)

Analytic Continuation (Optional)

يحدث أحيانا أن يكون التعبير $f_0(z)$ ، كما في متسلسلة لانهائية أو تكامل ، يمثل دالة تحليلية لها معنى فقط داخل منطقة محدودة G_0 في المستوى ليس إلا.

السؤال المطروح: أهناك من طريقة لتوسيع تعريف الدالة حتى تكون تحليلية على منطقة أكبر؟ وبالأخص أيمكن إيجاد دالة $f_1(z)$ تحليلية على منطقة G_1 تتقاطع مع G_0 بشرط أن يكون $f_0(z)=f_1(z)$ لجميع z في $G_0 \cap G_1$ ؟

إن تحقق ذلك ، فإننا نستطيع أن نعمم دالتنا إلى المنطقة $G_0 \cup G_1$ ، ونقول إن العنصرين (f_0, G_0) و (f_1, G_1) هما امتداد تحليلي مباشر الواحد إلى الآخر.

وأي امتداد تحليلي مباشر للعنصر (f_0, G_0) إلى المنطقة G_1 من الضروري أن يكون وحيدا. وأن لكل دالتين تحليليتين على G_1 وموافقتين على $G_0 \cap G_1$ يجب أن تتطابقا على G_1 (انظر التمرين (٢٠) من البند (٣,١)).

وتبدأ الطريقة للحصول على امتداد تحليلي بإيجاد متسلسلة تايلور للدالة المعطاة $f_0(z)$:

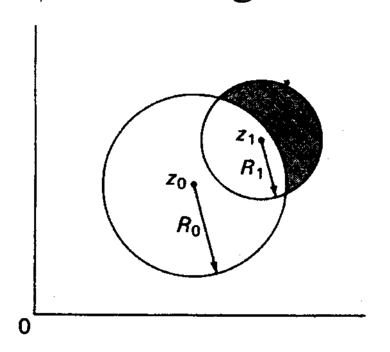
$$f_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

والمتقاربة على القرص $|z - z_0| < R_0$ الذي مركزه عند النقطة z_0 في G_0 .

إذا كانت z_1 تحقق $|z_1 - z_0| < R$ ، فيمكننا كتابة f_0 على شكل متسلسلة قوى :

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_1)^n, \qquad b_n=\frac{f_0^{(n)}(z_1)}{n!}$$

وتكون متقاربة على القرص $|z - z_0| < R_1$ ، في الحقيقة $R_1 \geq R_0 - |z_1 - z_0|$. في حالة المساواة فإن نقطة تماس الدائرتين : $|z - z_0| = R_0$ و $|z - z_1| = R_1$ يجب أن تكون نقطة شاذة للدالة ، حيث تؤدي نظرية تايلور إلى وجود نقطة شاذة على كل دائرة تقارب. ما عدا ذلك فإن جزءا من $|z - z_1| < R_1$ يقع خارج $|z - z_0| < R_0$ ويكون $(f_1, \{|z - z_1| < R_1\})$ امتدادا تحليليا مباشرا إلى $(f_0, \{|z - z_0| < R_0\})$ كما أن كلا من المتسلسلتين تتقارب على منطقة التقاطع (انظر الشكل رقم (٣,٥)) .



الشكل رقم (٣,٥). امتداد تحليلي مباشر.

مثال (٣,٥,١)

لمتسلسلة القوى $f_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(z-\frac{1}{2}\right)^n$ نصف قطر تقارب $R=1$ وبالتالي فإن منطقة التقارب G_0 هي القرص $|z-\frac{1}{2}|<1$.

بإمكاننا إتمام (f_0 , G_0) إلى قرص مركزه عند 0 وذلك بحساب :

$$f_0(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad f_0'(0)=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} ,\ldots,\ldots$$

ولكن من السهل ملاحظة أن :

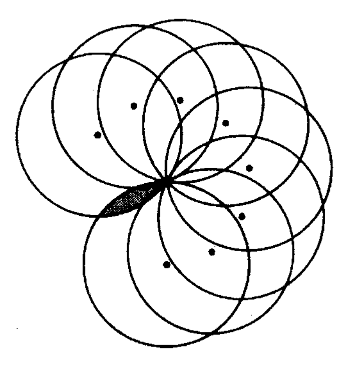
$$f_0(z)=(3/2-z)^{-1}$$

في G_0 . إذن من المثال (٣,١,٢) في البند (٣,١) نحصل على :

$$f_1(z)=\frac{2}{3}\frac{1}{1-\left(\frac{2z}{3}\right)}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2z}{3}\right)^n, \qquad |z|<\frac{3}{2}$$

ويؤدي هذا إلى أن G_1 هي القرص $|z|<\frac{3}{2}$ وأن $z=\frac{3}{2}$ هي نقطة شاذة للدالة.

يمكن أن نستمر في هذه الطريقة ، ولكن تجب الحيطة إذ إن الأقراص من الممكن أن تعود للتقاطع مع القرص الأول ، ومن الجائز ألا تكون متطابقة على منطقة التقاطع ويحدث هذا عندما تكون الدالة متعددة القيم ، وعندما تدور الأقراص حول نقطة تفرع للدالة وعلى فرع مختلف من فروع سطح ريمان لتلك الدالة (انظر الشكل (٣,٦)) وعليه ، حتى وإن كان (f_2 , G_2) امتدادا تحليليا مباشرا إلى (f_1, G_1) فليس من الضروري أن يكون امتدادا تحليليا إلى (fo, Go) ، وأن الدالة المتعددة القيم ستفيد في تعريف الامتداد ليس إلا.



الشكل رقم (٣,٦). امتداد تحليلي.

مثال (٣,٥,٢)

لنعتبر الدالـة $f=\frac{1}{\sqrt{z}}$ عنـد النقـاط $z=e^{\frac{\pi i}{4}}$, $z=e^{\frac{7\pi i}{4}}$ يمكننـا باسـتخدام نظرية ذات الحدين الحصول على تمثيل متسلسلة تايلور حول هاتين النقطتين:

$$\frac{1}{\sqrt{z}}=e^{-\pi i/8}\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-ze^{-\pi i/4}\right)}}$$

$$=e^{-\pi i/8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(1-ze^{\pi i/4}\right)^n, | z-e^{\pi i/4} |<1,$$

و

$$\frac{1}{\sqrt{z}}=e^{-7\pi i/8}\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-ze^{-7\pi i/4}\right)}}$$

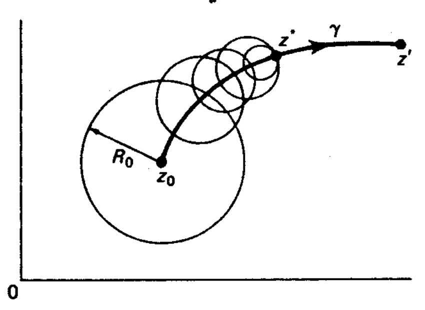
$$=e^{-7\pi i/8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(1-ze^{7\pi i/4}\right)^n, | z-e^{7\pi i/4} |<1.$$

بحساب قيمة المقدار الأول عند e^0 والثاني عند $e^{2\pi i}$ نحصل على $e^0=1$ و $e^{-\pi i}=-1$ على التوالي.

لاحظ أنه في سطح ريمان , $[C - \{0\}]^2$ وعندما تكون $f(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}$ فإن النقطة e^0 لا تنتمي إلى القرص $| z-e^{7\pi i/4} |<1$.

يسمى كل عنصر من المتسلسلة $(f_0 , G_0) , (f_1 , G_1), ..., (f_n , G_n)$ حيث يكون (f_j , G_j) امتـدادا تحليليا مباشـرا إلى (f_{j-1} , G_{j-1}) وامتـدادا تحليليـا إلى العنـاصر الأخـرى وبالتـالي فإنـه يمكـن استخدام الطريقـة السـابقة لبنـاء امتـدادات تحليلية واختيـار المراكـز $z_1 , z_2 , ... , z_n$ يحدد القيم للدوال. وكحالة خاصة ، إذا كان γ منحنيا يصل z_0 بنقطة z' ليست في القـرص $|z -z_0| < R_0$ فإنـه يمكـن بنـاء امتـداد تحليلـي يحتـوي علـى أقـراص $|z -z_j| < R_j$ من المتسلسلات الممثلة للدالة حيث z_j يتبع z_{j-1} في التمثيل للمنحنى γ .

إذا كان من الممكن الوصول إلى z' عن طريق سلسلة منتهية من تلك الأقراص، فنقول إننا قد حصلنا على امتداد تحليلي للدالة على طول المنحنى γ (انظر الشكل رقم (٣،٧)). عدا ذلك نكون قد حصلنا على عدد لا نهائي من الأقراص التي مركزها z_j تقترب من نقطة z^* على γ وبالتالي تقترب أنصاف أقطارها من الصفر.



الشكل رقم (٣،٧). امتداد تحليلي على طول γ.

وأكثر من هذا، فإن النقاط الشاذة للدالة، يجب أن تكون على محيط كل من هذه الأقراص. وتقترب هذه النقاط أيضا من z^*. بما أن كل جوار ε– للنقطة z^* يحتوي على نقطة شاذة، فلا يمكن أن تكون الدالة تحليلية عند z^*. وبذلك نكون قد أثبتنا النظرية التالية.

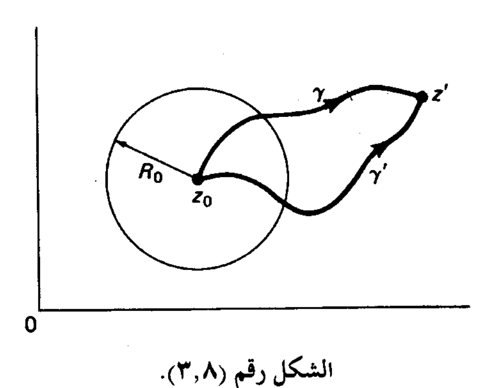
نظرية

يمكن أن نمدد متسلسلة القوى $\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ تحليليا على طول المنحنى γ الذي يبدأ في قرص تقاربه $|z - z_0| < R_0$ حتى يقابل أول نقاطها الشاذة.

من البدهي أنه إذا كان γ و γ' قوسين منفصلين باستثناء نقطتي النهاية z' و z_0 بشرط ألا توجد نقاط شاذة على أو داخل المنحنى المغلق $\gamma - \gamma'$، فإن نتيجة الامتداد التحليلي تكون هي نفسها على كل مسار. أما الداخل فيمكن أن يغطى بواسطة أقراص

تتقاطع مع الأقراص الناتجة من الامتداد التحليلي على هذين القوسين (انظر الشكل رقم (٣,٨)).

تسمى هذه النتيجة نظرية المونودرومي (monodromy theorem) وإثباتها صعب ولذلك لن يعطى.



الشكل رقم (٣,٨).

تعريف

الدالة التحليلية العامة (global analytic function) مجموعة $\mathfrak{I}$ من العناصر (f, G) وأي اثنتين منها يكون الواحد منهما امتدادا تحليليا للآخر بوساطة سلسلة من عناصر $\mathfrak{I}$.

مثال (٣,٥,٣)

لنفترض أن G_k منطقة تحوي جميع النقاط z التي تحقق $|\arg z - \left(\frac{k\pi}{2}\right)| < \frac{\pi}{2}$ لجميع الأعداد الطبيعية k ، لنفترض أن $f_k(z) = \log z$ لجميع z من G_k. عندئذ تكون المجموعة:

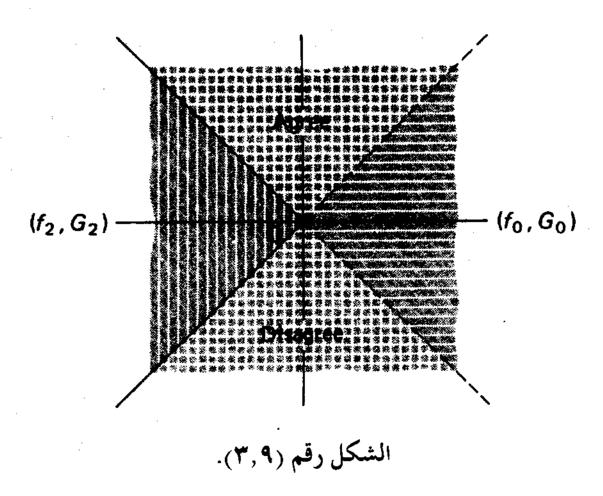
$$(f_0 , G_0) \ , (f_1 , G_1) \ , \ldots \ , (f_n , G_n) , \ldots$$

دالة تحليلية عامة، وكذلك مجموعة العناصر (f_j , G_j) لكل الأعداد الصحيحة j.

يقال إن العنصرين $(f_0 \ , G_0)$ و $(f_1 \ , G_1)$ يحددان نفس الفرع إلى دالة تحليلية عامة عند النقطة z_0 من $G_0 \cap G_1$ وذلك إذا كان $f_0(z) = f_1(z)$ في جوار ε - للنقطة z_0 .
لاحظ أنه ليس بالضرورة أن تكون العناصر الدالية امتدادات تحليلية الواحدة للأخرى.

مثال (٣,٥,٤)

إذا كانت G_k تحتوي على جميع النقاط z التي تحقق $|\arg z - \left(\frac{k\pi}{2}\right)| < 3\frac{\pi}{4}$
و $f_k(z) = \log z$ لجميع z في G_k ولجميع الأعداد الطبيعية k ، فإن $e^{i\pi/2}$ تقع في $G_0 \cap G_1$ و $f_0(z) = f_2(z)$ لجميع z في $|\arg z - \frac{\pi}{2}| < \frac{\pi}{4}$ ، بالرغم من أن كلا من $(f_0 \ ,G_0)$ و $(f_2 \ ,G_2)$ ليس امتدادا تحليليا مباشرا للآخر (انظر الشكل (٣,٩)).



الشكل رقم (٣,٩).

تصنّف النقاط على حدود مجال التعريف لدالة تحليلية عامة إلى مجموعتين :

أولا: نقاط من أجلها تكون الدالة امتداداً تحليليا نقاط عادية (regular point).

وثانيا: نقاط شاذة .

من الممكن أن تكون النقاط الشاذة معزولة أو لا تكون كذلك. إذا كانت معزولة سميت نقطة فرعية من الرتبة $n - 1$ إذا كان لجميع نقاط الجوار – ε للنقطة الشاذة لها، n من الفروع المختلفة، وإذا كانت $n = \infty$ فإنها تسمى نقطة فرعية لوغاريتمية .

تمارين (٣,٥)

في التمارين من (١) إلى (٣) أولا، أوجد دالة تحليلية تتوافق مع المتسلسلة المعطاة على قرص تقاربها.

(١) اكتب $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ في جوار للنقطة $z=\frac{1}{2}$ ثم احسب نصف قطر تقاربها.

(٢) اكتب $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ على شكل متسلسلة تايلور في جوار للنقطة $z = a$ و $|a| < 1$ ما نصف قطر تقارب المتسلسلة الجديدة؟

(٣) أثبت أن المتسلسلتين:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \quad \text{و} \quad i\pi+\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{n}$$

لا يوجد لهما منطقة تقارب مشتركة برغم أن كلا منهما امتداد تحليلي للأخرى.

أوجد في التمارين من (٤) إلى (٧) متسلسلة تايلور لكل من الدوال المعطاة في القرص $|z-1|<1$ للفرع الرئيسي لكل منهما، ثم أكمل كلا منهما تحليليا على طول:

$$\gamma: z(t)=e^{it} \quad , \quad 0 \quad t \quad 2\pi$$

هل تتطابق القيم عند $z(2\pi)$ مع تلك التي عند $z(0)$؟

(٤) $\operatorname{Log} z$ (٥) $z^{\frac{1}{2}}$

(٦) $\sin\left(z^{\frac{1}{2}}\right)\frac{\pi}{2}$ (٧) $(\sin z\pi/2)^{1/2}$

(٨) أثبت أن الدالة $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$ تحليلية في $|z| < 1$ مع أنها لا يمكن أن تكمل خارج هذه المجموعة. نسمي $|z| = 1$ حدودها الطبيعية.

(**إرشاد**: حيث:

$$f(z) = z^2 + z^4 + ... + z^{2n} + f(z^{2n})$$

أثبت أن النقاط $\zeta = e^{\pi i/2^k}$ تحقق:

$f(t\zeta) \to \infty$ عندما $t \to 1^-$)

(٩) أثبت أن $|z| = 1$ حدود طبيعية إلى $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

(١٠) أثبت أن المحور التحليلي حد طبيعي للدالة $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n!z}$.

أين تكون هذه الدالة تحليلية؟

(١١) أوجد متسلسلة مركزها عند $z = 1$ وتمثل الدالة:

$$f(z) = \int_0^{\infty} t^2\ e^{-zt} dt, \qquad 0 < t < \infty,$$

وتكون تحليلية في $\text{Re}\ z > 0$. وما امتدادها التحليلي إلى كل الفضاء؟

(١٢) تعرف دالة جاما في النصف الأيمن من الفضاء بوساطة التكامل:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, 0 < t < \infty$$

أثبت أنها تحقق المعادلة الدالية:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

وتكون تحليلية في $\text{Re}\ z > 0$. أثبت أن لها امتدادا تحليليا إلى كل الفضاء كدالة ميرومورفية ولها أقطاب بسيطة عند: $... , -2 , -1 , 0$.

(١٣) مبدأ شوارتز للانعكاس (Schwarz reflection principle)

لنفترض أن $f = u + iv$ دالة تحليلية في المنطقة G^+ التي تقع في النصف العلوي من الفضاء، ولها قطعة من المحور الحقيقي كجزء من حدودها.

إذا كانت f متّصلة وحقيقية على γ، فإن الدالة f استمراراً تحليليا وحيدا عبر γ إلى المنطقة G^- وهي انعكاس G^+ بالنسبة إلى المحور الحقيقي.

(**إرشاد**: أثبت أن $\overline{f(\bar{z})}$ تحليلية على G^- ثم طبّق نظرية موريرا أو معادلتي كوشي - ريمان على $(G^+ \cup \gamma \cup G^-)$

(١٤) أثبت أن نظرية برنكيم (Pringshim's theorem):

متسلسلة القوى $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ التي يساوي نصف قطر تقاربها الواحد ومعاملاتها a_n حقيقية غير سالبة، لها نقطة شاذة عند $z = 1$.

(١٥) أثبت أنه بالرغم من أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ متقاربة عند كل نقطة من $|z| = 1$ لكنها ليست تحليلية عند $z = 1$.

ملاحظات

نظريات مهمة تعود إلى ميتاج - ليفلر وفيرستراس (Mittag - Leffler & Weierstrass) تهتم بالمتسلسلات اللانهائية والتمثيل الضربي لدوال ميرومورفية قد حذفت، ويطلب من القارئ دراسة هذه المواضيع التي يمكن أن تكون موجودة في: [A, pp. 185-196].

البند (٤,٣)

يوجد إثباتان مختلفان لنظرية بيكارد (Picard) في [A, p. 297] و [V, p. 144].

البند (٣,٥)

الطريقة التي أشير إليها عند بناء امتداد تحليلي مباشر جيدة من الناحية النظرية لكنها قليلة الاستعمال في التطبيق إذ أن المشكلة تكمن في حساب المعاملات b_n التي تكون مجاميع لمتسلسلات لا نهائية بدون معرفة معلومات إضافية .

يوجد إثبات لنظرية مونودورمي (monodromy) في [A, p. 285] .

التكامل على مسار
CONTOUR INTEGRATION

(٤,١) نظرية الباقي
The Residue Theorem

لقد بينا في البند (٣,٣) أن الدالة التحليلية في المنطقة $0 < |z - z_0| < R$، يمكن التعبير عنها بمتسلسلة لورانت حول z_0.

يسمى المعامل :

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} f(\zeta)\, d\zeta, \;\; 0 < \rho < R,$$

في متسلسلة لورانت بالباقي The Residue للدالة $f\,(z)$ عند z_0، ويرمز له بالرمز $\operatorname{Res}_{z_0} f(z)$ ويلاحظ أن معرفة الباقي للدالة f عند z_0 يمدنا بطريقة بديلة لحساب التكامل :

$$\int_{\gamma} f\,(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0} f(z),$$

حيث γ منحنى جوردن الأملس جزئيا (pws Jordan curve) فإن النظرية التالية لها أهمية أساسية في التحليل المركب وتمثل المبدأ الرئيس في تطور الطرق المتعلقة بهذا الفصل.

نظرية الباقي Residue theorem

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة G تحتوي على مجموعة من النقاط الواقعة داخل وعلى منحنى جوردان الأملس إلا عند عدد محدود من النقاط الشاذة $z_1,\ldots,z_k$ داخل γ، فإن:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \operatorname{Res}_{z_n} f(z)$$

البرهان

من الممكن أن نرسم دوائر $|z - z_n| = r_n\ (> 0)$ و $n = 1, 2, \ldots, k$ داخل γ بشرط أن تكون الأقراص $|z - z_n| \le r_n$ منفصلة الواحد عن الآخر. وبتعميم نظرية كوشي إلى مناطق متعددة الترابط (multiply connected regions) (انظر البند (٢,٣)) نحصل على:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{k} \int_{|z-z_n|=r_n/2} f(z)\,dz$$

وفي كل منطقة $0 < |z - z_n| < r_n$ تعطى متسلسلة لورانت للدالة $f(z)$ حول z_n الباقي التالي:

$$\operatorname{Res}_{z_n} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_n|=r_n/2} f(z)\,dz,\ n = 1,\ldots,k$$

وبالاستفادة من هذه المتطابقات نحصل على النتيجة المرجوة. ■

ولكي تكون هذه النظرية مفيدة نحتاج إلى الحصول على طرق سهلة لحساب الباقي. وعلى وجه الخصوص نرغب في أن نتجنب عمليات التكامل متى كان ذلك ممكنا. فإذا عرّفت متسلسلة لورانت صراحة فإن الباقي يساوي a_{-1}. نلاحظ أن للنقاط الشاذة غير الأساسية (nonessential singularities) تنعدم قيمة a_{-1} عند نقاط الشذوذ القابل للإزالة، وإذا كانت z_0 قطبا من الرتبة k فإن:

$$(z - z_0)^k f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+k},$$

وعليه فإن لقيمة $k = 1$ نحصل على :

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = a_{-1},$$

بينما لقيم $k > 1$، نجد أن :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right] = (k-1)! a_{-1}$$

مثال (١٠, ١, ٤)

أوجد الباقي عند كل النقاط الشاذة في C للدوال :

(١) $f(z) = z^2 \sin(1/z)$ (ب) $g(z) = e^z/(z^3 - z^2)$ (جـ) $h(z) = z/\sin z$

الحل

(١) نعلم أن متسلسلة لورانت للدالة $f(z)$ حول $z = 0$ هي :

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} - \dots \right) \\ &= z - \frac{1}{3! z} + \frac{1}{5! z^3} - \dots, \qquad 0 < |z| < \infty \end{aligned}$$

ومنها نجد أن :

$$\text{Res}_0 f(z) = -\frac{1}{6}$$

(ب) لاحظ أن $g(z)$ لها قطب بسيط عند $z = 1$ ، وقطب من الرتبة الثانية عند $z = 0$. وهكذا نحصل على :

$$\text{Res}_1 g(z) = \lim_{z \to 1} (z - 1) g(z) = e$$

و

$$\text{Res}_0 g(z) = \lim_{z \to 0} \left[z^2 g(z) \right]' = \lim_{z \to 0} \frac{e^z (z - 2)}{(z - 1)^2} = -2$$

(جـ) لاحظ أن $h(z)$ لها نقطة شاذة قابلة للعزل عند $z = 0$ ، ولها أقطاب عند $z = \pi k$ حيث $k = \pm 1 , \pm 2 , \ldots$ لاحظ [مثال (٣,٤,١) (جـ) بالبند (٣,٤)]. وبما أن $\sin (z - \pi k) = (-1)^k \sin z$ ، فإن الحل الكامل يعطى بواسطة العلاقة :

$$\operatorname{Res}_{\pi k} h(z) = \lim_{z \to k} \frac{(z - \pi k) z}{\sin z} = (-1)^k \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

مثال (٤,١,٢)

احسب التكامل :

$$\int_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z}{z^3 - z} dz$$

الحل

تحدث النقاط الشاذة لدالة التكامل عند $z = 0 , \pm 1$. وحينئذ نحتاج فقط لحساب الباقي عند القطبين البسيطين عند كل من 0 و 1 :

$$\operatorname{Res}_0 \frac{e^z}{z(z^2 - 1)} = \lim_{z \to 0} \frac{e^z}{z^2 - 1} = -1$$

$$\operatorname{Res}_1 \frac{e^z}{z(z^2 - 1)} = \lim_{z \to 1} \frac{e^z}{z(z + 1)} = \frac{e}{2}$$

إذن :

$$\int_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z}{z^3 - z} dz = \pi i (e - 2)$$

على الرغم من أن نظرية الباقي قد ذكرت بمساعدة البواقي لمجموعة النقاط الشاذة لدالة التكامل داخل منحنى جوردان الأملس جزئيا فإن البواقي عند المجموعة S^* للنقاط الشاذة لدالة التكامل خارج γ يمكن أن تستخدم في حساب التكاملات.

نظرية الباقي للنقاط الشاذة الداخلية والخارجية Inside-Outside theorem

إذا كانت:

$$F(z)=\frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0}{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_1 z+b_0}$$

حيث $m \geq n+2$ فإن:

$$\int_\gamma F(z)dz=\begin{cases}2\pi i\sum_s \operatorname{Res} F(z)\\ \\ -2\pi i\sum_{s^*} \operatorname{Res} F(z)\end{cases}$$

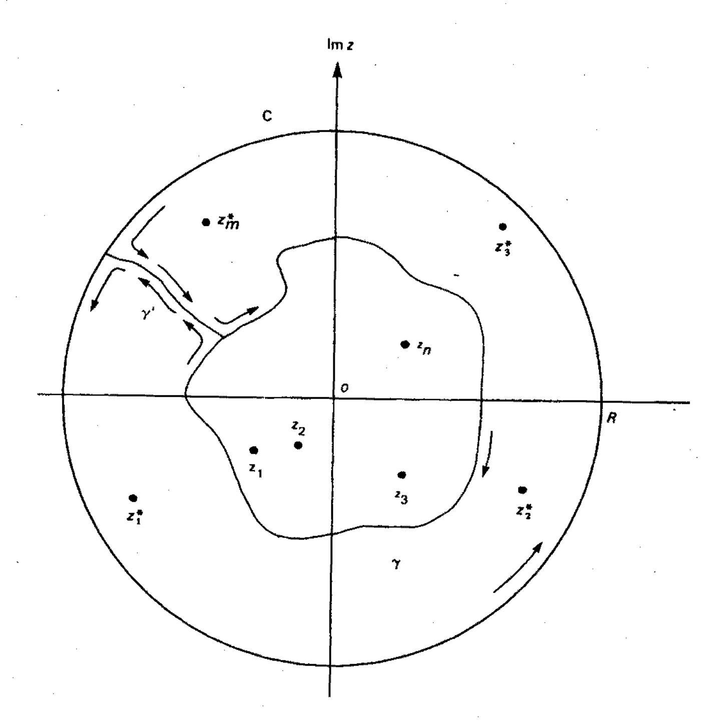
البرهان

المساواة العليا هي إعادة صياغة نص نظرية الباقي . وللحصول على المساواة الدنيا نختار R كبيرة بمقدار كاف لكي تقع γ وكل أقطاب الدالة $F(z)$ داخل الدائرة $C: |z|=R$. ليكن γ' منحنى أملس جزئيا يصل بين γ والدائرة C والتي لا تمر بأي قطب للدالة $F(z)$ (انظر الشكل رقم (٤،١)) . إذن وباستخدام نظرية الباقي نحصل على:

$$2\pi i\sum_{s^*}\operatorname{Res} F(z)=\int_{-\gamma+\gamma'+c-\gamma'} F(z)dz,$$

حيث γ في اتجاه عقرب الساعة. يلغي التكامل على γ' التكامل الآخر على $-\gamma'$ (انظر الجزء (٣) من النظرية الأولى بالبند (٢،٣)) لنحصل على:

$$\int_\gamma F(z)dz=-2\pi i\sum_{s^*}\operatorname{Res} F(z)+\int_{|z|=R} F(z)dz,$$



الشكل رقم (٤,١). $S = \bigcup_{k=1}^{n} z_k$: أقطاب داخل γ و $S^* = \bigcup_{k=1}^{m} z_{k_k}^*$: أقطاب خارج γ

بما أن R اختيارية ، فإن البرهان سوف يكتمل إذا بيّنا أن :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} \mathrm{F}(\mathrm{z})\, dz = 0$$

من الفرض نجد أن $|z^2 F(z)|$ محدودة بثابت $M < \infty$ عندما $z \to \infty$ ، وذلك لأن :

$$z^2 F(z) = \frac{a_n z^{n+2-m} + \ldots + a_0 z^{2-m}}{b_m + b_{m-1} z^{-1} + \ldots + b_0 z^{-m}}, \quad \mathrm{m} \ge \mathrm{n} + 2$$

إذن :

$$\left| \int_{|z|=R} F(z) dz \right| \le \int_{|z|=R} \frac{\left|z^2 F(z)\right|}{|z|^2} |dz| \le \frac{2\pi RM}{R^2}$$

وتؤول هذه القيمة إلى الصفر عندما $R \to \infty$.

مثال (٤,١,٣)

احسب التكامل:

$$\int_{|z|=1} \frac{z+a}{z^n(z+b)}dz, \qquad |b|>1$$

الحل

لدالة التكامل قطب من الرتبة n عند 0 وقطب بسيط عند $-b$. وحتى لو أعطيت n ، فإن حسابات الباقي عند 0 غير سهلة لقيم $n > 1$ ، طالما تطلب الأمر $(n-1)$ من التفاضلات للدالة $(z+a)/(z+b)$. ويمكن تجنب كل هذه الصعوبات باستخدام نظرية الباقي للنقاط الشاذة الداخلية والخارجية كالتالي:

$$\int_{|z|=1} \frac{z+a}{z^n(z+b)}dz = -2\pi i \operatorname{Res}_{-b} \frac{z+a}{z^n(z+b)}$$

$$= -2\pi i \lim_{z\to -b} \frac{z+a}{z^n} = \frac{2\pi i(a-b)}{(-1)^{n+1} b^n}$$

لاحظ أن التكامل سيصبح صفرا إذا كان $|b| < 1$.

تمارين (٤,١)

أوجد الباقي عند كل النقاط الشاذة في C للدوال المعطاة في التمارين من (١) إلى (١٢):

(١) $f(z) = \dfrac{z^3}{z^2+1}$ (٢) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3 - z}$

(٣) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^3}$ (٤) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)^2}$

(٥) $f(z) = z\, e^{1/z}$ (٦) $f(z) = z \cos \dfrac{1}{z}$

(٧) $f(z) = (z-1)\, e^{1/z}$ (٨) $f(z) = (z-1)^2 \sin \dfrac{1}{z}$

(٩) $f(z) = \dfrac{z}{\sinh z}$ (١٠) $f(z) = \tan z$

(١١) $f(z) = \cot z$ (١٢) $f(z) = \left(z + \dfrac{\pi}{2}\right) \sec z$

احسب التكاملات التي في التمارين من (١٣) إلى (٢٤). وفي التمارين من (١٥) إلى (١٨) n عدد صحيح غير سالب :

(١٣) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\, dz$ (١٤) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3+z}\, dz$

(١٥) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^n\left(z^2+1\right)}$ (١٦) $\displaystyle\int_{|z-1|=\sqrt{5}/2} \frac{dz}{z^n\left(z^2+1\right)}$

(١٧) $\displaystyle\int_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z^n\left(z^2+1\right)}$ (١٨) $\displaystyle\int_{|z-i|=1/2} \frac{dz}{z^n\left(z^2+1\right)}$

(١٩) $\displaystyle\int_{|z-1/2|=1} \frac{\sin z}{z^3+z}\, dz$ (٢٠) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{\left(z^3+z\right)^2}\, dz$

(٢١) $\displaystyle\int_{|z|=1} z e^{1/z}$ (٢٢) $\displaystyle\int_{|z|=1} \tan z\, dz$

(٢٣) $\displaystyle\int_{|z|=2} \tan z\, dz$ (٢٤) $\displaystyle\int_{|z|=5} \tan z\, dz$

(٢٥) افترض أن $Q(z)$ و $P(z)$ كثيرتا حدود. بيّن أن كل البواقي للدالة $[P(z)/Q(z)]'$ أصفار .

(٤,٢) حساب التكامل الحقيقي المحدود

Evaluation of Definite Real Integrals

نقدم الآن هنا ، وفي الأجزاء الثلاثة التالية ، عددا من الطرق المفيدة لتطبيق نظرية الباقي لحساب التكامل المحدود.

فالتكاملات التي لها الصورة :

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$$

حيث $F(s,t)$ هي خارج قسمة كثيرتي حدود في s و t ، ربما تتحول إلى تكامل خطي باستخدام التعويض $z = e^{i\theta}$ حيث $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، وذلك لأن :

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

$$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz$$

وهكذا نكون قد أثبتنا النظرية التالية.

نظرية

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = \int_{|z|=1} F\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] \frac{dz}{iz}$$

مثال (٤,٢,١)

بيّن أن :

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + b\cos\theta)^2} = \frac{\pi a}{\sqrt{\left(a^2 - b^2\right)^3}}, a > b > 0$$

الحل

بما أن $\cos\theta$ تأخذ نفس القيم على $[\pi \; , \; 2\pi]$ كما يحدث على $[0 \; , \; \pi]$، فإن التكامل السابق يساوي:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{bz^2+2az+b}$$

وبتحليل المقام إلى $b\,(z-p)\,(z-q)$، حيث:

$$p=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}, \qquad q=\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

وملاحظة أن $pq=1$ و $|q|>a/b>1$ ، نرى أن النقاط الشاذة الوحيدة لدالة التكامل على قرص الوحدة هي عند p . فضلا عن ذلك فإن p هي قطب من الرتبة الأولى، وعليه فإن الباقي لدالة التكامل عند p يساوي:

$$\lim_{z\to p}\frac{1}{b(z-q)}=\frac{1}{b(p-q)}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}$$

وتستنتج الإجابة الآن من نظرية الباقي.

مثال (٢, ٢, ٤)

أثبت أن:

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}=\frac{\pi a}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}}, a>b>0$$

الحل

مرة أخرى ، التكامل يساوي:

$$\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{zdz}{(bz^2+2az+b)^2}=\frac{2}{ib^2}\int_{|z|=1}\frac{zdz}{(z-p)^2(z-q)^2},$$

وله قطب من الرتبة 2 عند p والتي هي نقطة شاذة وحيدة. والباقي عند p يساوي :

$$\lim_{z\to p}\left[\frac{z}{(z-q)^2}\right]=\lim_{z\to p}\frac{-(z+q)}{(z-q)^3}=\frac{-(p+q)}{(p-q)^3}=\frac{ab^2}{4\sqrt{(a^2-b^2)^3}}$$

وتعطى النتيجة الآن مباشرة.

تمارين (٤,٢)

احسب التكاملات في التمارين من (١) إلى (٩) بوساطة الطريقة المبينة في هذا البند، وفي التمارين من (٦) إلى (٨) تكون n عدد صحيح غير سالب.

(١) $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\sin^2\theta}=\frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}},\qquad a>0$$

(٢) $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+\sin^2\theta)^2}=\frac{\pi(2a+1)}{4\sqrt{(a^2+a)^3}},\quad a>0$$

(٣) $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}=\frac{2\pi}{ab},\qquad a,b>0$$

(٤) $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)^2}=\frac{\pi(a^2+b^2)}{a^3b^3},\qquad a,b>0$$

(٥) $$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{1-a^2}, & |a|<1\\[2mm] \dfrac{2\pi}{a^2-1}, & |a|>1\end{cases}$$

(٦) $$\int_0^{2\pi}\cos^n\theta\,d\theta=\begin{cases}\dfrac{n!\pi}{2^{n-1}\left[\left(\dfrac{n}{2}\right)!\right]^2}, & n \text{ زوجي}\\[2mm] 0, & n \text{ فردي}\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}(a\cos\ \theta+b\sin\theta)^n\,d\theta=\begin{cases}\dfrac{n!\pi}{2^{n-1}\left[\left(\dfrac{n}{2}\right)!\right]^2}\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^n}, & n \text{ زوجي}\\ 0, & n \text{ فردي}\end{cases} \tag{٧}$$

حيث b و a عددان حقيقيان.

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)d\theta=\frac{2}{n!} \tag{٨}$$

$$\int_0^{2\pi}\cot(\theta+ib)d\theta=-2\pi i\sin b \quad , \quad 0\neq b\in R \tag{٩}$$

(٤,٣) تقدير التكامل الحقيقي المعتلّ

Evaluation of Improper Real Integral

في النظرية المعطاة بالبند (٤,٢) تحولت فترة التكامل تلقائيا إلى منحنى مغلق، وسمح لنا بتطبيق نظرية الباقي. وفي التطبيق التالي لن يكون هذا ممكنا، ولذا نستبدل المنحنى المعطى بمنحنى مغلق حتى تتفق قيم التكاملات بعد أخذ النهاية.

نظرية

لتكن $F(z)$ خارج قسمة كثيرتي حدود في z بحيث إن:

١- $F(z)$ ليس لها أقطاب على المحور الحقيقي.

٢- $F(1/z)$ لها جذر من الرتبة 2 على الأقل عند $z = 0$ ؛ أي أن درجة المقام تتجاوز درجة البسط بمقدار 2 على الأقل.

عندها يكون:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\begin{Bmatrix}\cos\ ax\\ \sin\ ax\end{Bmatrix}dx=\begin{Bmatrix}\text{Re}\\ \text{Im}\end{Bmatrix}2\pi i\sum_{y>0}\text{Res}\ F(z)e^{iaz}, \qquad a\geq 0$$

ويؤخذ المجموع فقط على أقطاب $F(z)$ في نصف المستوى العلوي .

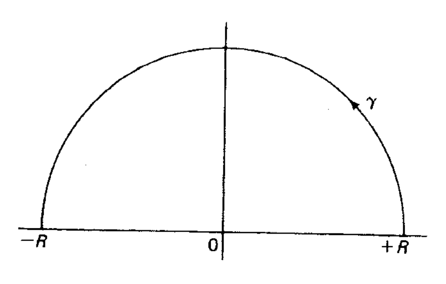
البرهان

ليكن γ يمثل المنحنى المغلق الناتج من أخذ القطعة المستقيمة $(-R, R)$ على المحور الحقيقي للإحداثيات متبوعا بنصف الدائرة $z = Re^{i\theta}$ حيث $0 \leq \theta \leq \pi$. وبما أن الدالة $F(z)$ هي خارج قسمة كثيرتي حدود، فإن أقطابها، وبالمثل أقطاب $F(z)\,e^{i\theta}$، تتكون من جذور المقام لا غير، وعليه فإن عددها محدود. وإذا اختيرت R كبيرة جدا، فإن كل الأقطاب للدالة $F(z)$ في النصف العلوي للمستوى ستقع داخل γ (انظر الشكل (٤,٢)).

إذن تؤدي نظرية الباقي إلى:

$$2\pi i \sum_{y>0} \operatorname{Res} F(z)e^{iaz} = \int_{r} F(z)e^{iaz}\,dz$$

$$= \int_{-R}^{R} F(x)e^{iaz}\,dx + \int_0^{\pi} F\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)e^{ia\mathrm{Re}^{i\theta}} i\mathrm{Re}^{i\theta}\,d\theta$$



الشكل رقم (٤,٢).

ومن (٢) تكون $|z^2 F(z)|$ محدودة بالثابت M عند كل النقاط الواقعة في النصف العلوي للمستوى التي لا تقع بداخل γ. وعليه تكون:

$$\left|\int_0^{\pi} F\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\, e^{ia\,\mathrm{Re}^{i\theta}} i\,\mathrm{Re}^{i\theta}\, d\theta\right| \leq \frac{M}{R}\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta} d\theta \leq \frac{M\pi}{R}$$

لأن $e^{-aR\sin\theta} \leq 1$. ومن (٢) وبوساطة نظرية المقارنة للتكاملات المعتلة في حساب التكامل، ينتج أن كلا من:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos\, ax\, dx\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\sin\, ax\, dx, \qquad a \geq 0$$

متقارب. وبجعل $R \to \infty$ ، نحصل على :

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, e^{iax}\, dx = 2\pi i \sum_{y>0} \text{Res}\, F(z)\, e^{iaz}, \qquad a \geq 0$$

التي نحصل منها على النتيجة بأخذ الأجزاء الحقيقية والتخيلية للطرفين. ■

ملحوظة

إذا كانت $a > 0$ يمكن أن يستبدل الشرط (٢) بالتالي (٢*) :

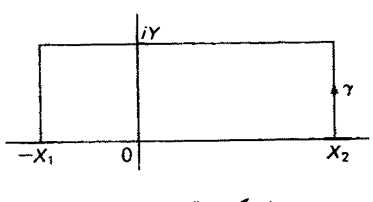
(٢*) : $F\,(1/z)$ لها جذر من الرتبة 1 عند $z = 0$. وفي هذه الحالة لا يمكن أن نستخدم نظرية المقارنة للحصول على التقارب للتكامل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{iax}\, dx, \qquad a > 0$$

وفي الحقيقة، يجب أن نبرهن على أن :

$$\int_{-X_1}^{X_1} F(x) e^{iax}\, dx, \qquad a > 0$$

له نهاية عندما تؤول كل من X_1 و X_2 بشكل مستقل إلى ∞ . لتكن γ حدود مستطيل تقع رؤوسه عند النقط $-X_1$ ، X_2 ، X_2+iY و $-X_1+iY$ وقد اختيرت الثوابت X_1 ، X_2 و Y كبيرة بما فيه الكفاية بحيث تكون أقطاب الدالة $F(z)$ التي في نصف المستوى العلوي واقعة داخل γ (انظر الشكل رقم (٤،٣)). ويبين الشرط (٢*) الآن أن $|z\, F\,(z)|$ محدودة بالثابت M عند كل النقاط الموجودة في $y > 0$ وليست داخل γ .



الشكل رقم (٤,٣).

يحقق التكامل :

$$\left|\int_{X_2}^{X_2+iY} F(z)e^{iaz}dz\right| \le M\int_0^Y \frac{e^{-ay}}{|X_2+iy|}dy$$

$$\le \frac{M}{X_2}\int_0^Y e^{-ay}dy < \frac{M}{aX_2}$$

بالمثل ، التكامل على القطعة المستقيمة التي تربط X_1-iY بالنقطة X_1 محدودة بالمقدار M/aX_1 ، وأن :

$$\left|\int_{X_2+iY}^{X_1+iY} F(z)e^{iaz}dz\right| \le \frac{Me^{-aY}}{Y}\int_{-X_1}^{X_2}dx = \frac{Me^{-aY}}{Y}(X_1+X_2)$$

وباستخدام نظرية الباقي والمتباينة المثلثية نجد أن :

$$\left|\int_{-X_1}^{X_2} F(x)e^{iax}dx - 2\pi i\sum_{y>0}\operatorname{Res} F(z)e^{iaz}\right|$$

$$< M\left[\frac{1}{aX_1}+\frac{1}{aX_2}+\frac{e^{-aY}}{Y}(X_1+X_2)\right]$$

ونحصل على النتيجة بجعل $Y\to\infty$ ، ثم جعل X_1 و X_2 تؤولان بشكل مستقل إلى ∞ .

مثال (٤,٣,١)

أثبت أن :

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx = \frac{e^{-ab}}{2b}, \qquad a\ge 0,\ b>0.$$

الحل

تساوي الدالة $F(z)$ هنا $(z^2+b^2)^{-1}$ ولها أقطاب عند $\pm ib$. والدالة $F(1/z)=z^2/(1+b^2z^2)$ لها جذور من الرتبة الثانية عند الصفر.

وحيث إن الفروض للنظرية متحققة فإننا نحصل على:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\ ax}{x^2+b^2}dx=\text{Re}\left[2\pi i\text{Res}_{ib}\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\right]=\text{Re}\left[\frac{\pi\pi}{b}e^{-ab}\right],$$

ومنها نحصل على النتيجة لأن دالة التكامل زوجية. لاحظ أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\ ax}{x^2+b^2}dx=0,\qquad a\geq 0,\quad b>0.$$

مثال (٢, ٣, ٤)

بيّن أن:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin\ ax}{x^2+b^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-ab},\qquad a>0,\quad b>0.$$

الحل

بتطبيق الشرطين (١) و(٢)* على $F(z)=z/(z^2+b^2)$ نحصل على:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\ ax}{x^2+b^2}dx=\text{Im}\left[2\pi i\text{Res}_{ib}\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}\right]=\pi e^{-ab},$$

ودالة التكامل مرة أخرى زوجية.

تمارين (٤,٣)

احسب التكاملات التالية مستخدما الطريقة المعطاة في هذا البند من الفصل:

(١) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\ dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=-\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=\pi \quad (٢)$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{\pi}{4a}\ , \qquad a>0 \quad (٣)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}=\frac{\pi}{ab(a+b)}, \qquad a,b>0 \quad (٤)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n+1}}=\frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n}(n!)^2},$$ (٥) n عدد صحيح غير سالب

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\,ax\,dx}{\left(x^2+b^2\right)^2}=\frac{(1+ab)e^{-ab}}{2b^3}, \qquad a\geq 0,\quad b>0 \quad (٦)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin\,ax\,dx}{\left(x^2+b^2\right)^2}=\frac{\pi}{2}(2-ab)e^{-ab}\ , \qquad a,b>0 \quad (٧)$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\,ax}{x^4+b^4}dx=\frac{\pi}{2b^3}e^{-(ab)/\sqrt{2}}\sin\left(\frac{ab}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\right), \qquad a\geq 0,\quad b>0 \quad (٨)$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin ax}{x^4+b^4}dx=\frac{\pi}{2b^2}e^{-(ab)/\sqrt{2}}\sin\frac{ab}{\sqrt{2}}, \qquad a\geq 0,\quad b>0 \quad (٩)$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^3\,\sin\,ax}{x^4+b^4}dx=\frac{\pi}{2}e^{-(ab)/\sqrt{2}}\cos\frac{ab}{\sqrt{2}}, \qquad a,\,b>0 \quad (١٠)$$

(٤, ٤) التكاملات لدوال لها أقطاب على المحور الحقيقي

Integrals with Poles on the Real Axis

افترضنا خلال مناقشة البند (٤,٣) أن الدالة $F(z)$ ليس لها أقطاب على المحور الحقيقي، وإلا تباعد التكامل:

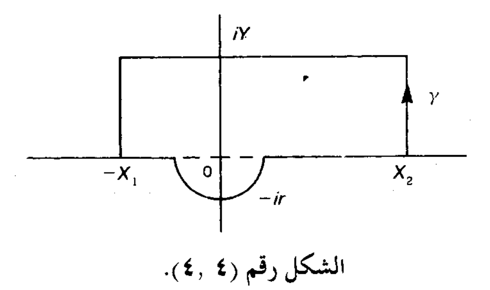
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{iax} dx, \qquad a > 0$$

إلا أن الجزء الحقيقي أو التخيلي للتكامل السابق ربما يتقارب إذا كانت $F(z)$ لها أقطاب من الرتبة 1 وتتطابق مع جذور $\cos ax$ أو $\sin ax$.

افترض أن $F(z)$ لها قطب من الرتبة الأولى عند $z = 0$ فقط لا غير، وليس لها أقطاب أخرى على المحور الحقيقي. إذن التكامل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \sin ax \, dx, \quad a > 0$$

متقارب. وتتكون طريقة حساب التكامل من استخدام المحيط γ للمستطيل ذي الرؤوس - X_1 ، X_2 ، $X_2 + iY$ و $-X_1 + iY$ ، ونتجنب الصفر بواسطة إلحاق نصف دائرة صغيرة E ذات نصف قطر r في النصف السفلي من المستوى (انظر الشكل رقم (٤،٤)).



الشكل رقم (٤، ٤).

افترض أن X_1 ، X_2 ، Y و $\frac{1}{r}$ قد اختيرت كبيرة كبرا كافيا ؛ بحيث تقع كل أقطاب الدالة $F(z)$ غير الموجودة في النصف السفلي للمستوى داخل γ. إذن $F(z)\, e^{iaz} = (a_{-1}/z) + f(z)$ حيث $a_{-1} = \text{Res}_0\, F(z)\, e^{iaz}$ و $f(z)$ تحليلية في الجوار - ε المغلق للنقطة $z = 0$.

والآن على نصف الدائرة E التي نصف قطرها $r < \varepsilon$ ،

$$\int_E F(z)e^{iaz}dz = i\int_{-\pi}^{0}\left[a_{-1} + f\left(re^{i\theta}\right)\ re^{i\theta}\right]d\theta$$

$$= \pi i a_{-1} + ir\int_{-\pi}^{0} f\left(re^{i\theta}\right)\ e^{i\theta}d\theta.$$

بما أن $f(z)$ محدودة على $|z| \leq \varepsilon$ بالثابت N ، فإن :

$$\left|ir\int_{-\pi}^{0} f\left(re^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta\right| \leq rN\pi$$

وينعدم الحد الثاني عندما تؤول r إلى الصفر. وباستخدام نظرية الباقي والمتباينات المستنتجة في البند (٣،٤) نحصل على :

$$\int_{-X_1}^{-r} + \int_E + \int_r^{X_2} F(x)e^{iax}dx - 2\pi i\sum_{y\geq 0}\text{Res}\, F(z)e^{iaz} \to 0$$

وذلك بجعل $Y \to \infty$ ، وحينئذ تؤول X_1 و X_2 إلى ∞ بشكل مستقل.

والآن، اجعل $r \to 0$، سنجد أن :

$$\lim_{r\to 0}\int_{-\infty}^{-r} + \int_r^{\infty} F(x)e^{iax}dx = 2\pi i\left[\sum_{y>0}\text{Res}\, F(z)e^{iaz} + \frac{a_{-1}}{2}\right]$$

يشار إلى النهاية في الطرف الأيسر لهذا التعبير على أنها القيمة الأساسية لكوشي (Cauchy principle value) للتكامل وتكتب :

$$\text{PV}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{iax}dx = 2\pi i\left[\sum_{y>0}\text{Res}\, F(z)e^{iaz} + \frac{a_{-1}}{2}\right].$$

لاحظ أن نصف قيمة الباقي فقط عند الصفر توجد في الطرف الأيمن .

ونستطرد باختصار بعمل بعض الملاحظات حول القيم الأساسية لكوشي.

لتكن $f(x)$ معرّفة على خط الأعداد الحقيقية ، اعتبر النهايات :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx, \quad (١)$$

$$\lim_{R_1\to\infty}\int_{-R_1}^{0} f(x)\,dx+\lim_{R_2\to\infty}\int_{0}^{R_2} f(x)\,dx \quad (٢)$$

إذا كانت النهاية (١) موجودة فيسمى التكامل المعتل 'متقاربا بمفهوم كوشي' وتكتب:

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

وإذا كانت النهايات في (٢) موجودة ، فإننا نقول إن التكامل المعتل "يتقارب" ونضع:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{R_1\to\infty}\int_{-R_1}^{0} f(x)\,dx+\lim_{R_2\to\infty}\int_{0}^{R_2} f(x)\,dx$$

لاحظ أن تقارب التكامل يؤدي إلى التقارب بمفهوم كوشي (أي إلى نفس القيمة)، ولكن يمكن أن يكون لتكامل ما قيمة أساسية من غير أن يكون متقاربا ، فعلى سبيل المثال:

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx=\lim_{R\to\infty}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_{-R}^{R}\right)=0,$$

ولكن لا توجد أي نهايات في (٢). وفي بعض الحالات ، مثل حالة شحنة على لوح لا نهائي ، فإن النهاية تستخدم في (١) وفي حالات أخرى ، مثل الشحنة الكليّة على اللوح ، فإن النهاية توظف في (٢) وسنختار الوسيلة الملائمة للمسألة.

ويأتي تطور مشابه عندما تعرّف $f(x)$ في الفترة $a\le x\le b$ ولكنها غير محدودة في كل جوار لنقطة c حيث $a<c<b$. يتقارب التكامل المعتل بشرط أن يوجد الطرف الأيمن للمعادلة:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx,\quad \varepsilon>0,\ \eta>0, \qquad (٣)$$

وحتى في حالة عدم وجود النهايات ، فإن القيمة الأساسية لكوشي للتكامل:

$$\mathrm{PV}\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right),\quad \varepsilon>0, \quad (٤)$$

يمكن أن توجد ، مثال ذلك:

$$\text{PV}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\log\varepsilon+\log\frac{1}{\varepsilon}\right)=0\,,\quad \varepsilon>0$$

ولكن لا توجد أي من النهايات في (٣).

وكما سبق ، فإن التقارب يؤدي إلى التقارب بمفهوم كوشي. وأكثر من ذلك فإنه يمكن أن يكون للتكامل المعتل ذي النوع المختلط (mixed type) قيمة أساسية لكوشي حتى إذا تباعد التكامل :

$$\text{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x}=\text{PV}\left(\int_{-\infty}^{-1}+\int_{1}^{\infty}\right)\frac{dx}{x}+\text{PV}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$$
$$=\lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{-1}+\int_{1}^{R}\right)\frac{dx}{x}=0.$$

وإذا كانت $F(z)$ لها أقطاب عديدة من الرتبة الأولى على المحور الحقيقي ، وتنطبق مع الجذور لأي من $\cos ax$ أو $\sin ax$ ، فإننا نحصل على النتيجة العامة التالية آخذين عددا من أنصاف الدوائر مساويا لعدد أقطاب γ والتعامل معها مثل التعامل مع نصف الدائرة العليا E.

نظرية

افترض أن $F(z)$ هي خارج قسمة كثيرتي حدود في z بحيث إن :

(١) كل أقطاب الدالة $F(z)$ التي تقع على المحور الحقيقي لها الرتبة 1 ، وتنطبق مع الجذور لأي من $\cos ax$ أو $\sin ax$ ، $a>0$.

(٢) $F(1/z)$ لها صفر (جذر) من الرتبة الأولى على الأقل عند $z=0$.

عندها يكون :

$$\text{PV}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{iax}dx=2\pi i\left[\sum_{y>0}\text{Res}\,F(z)e^{iaz}+\frac{1}{2}\sum_{y=0}\text{Res}\,F(z)e^{iaz}\right]$$

مثال (٤، ٤، ١)

برهن أن :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

الحل

بما أن $F(z) = 1/z$ ، فمن الواضح أن (١) و(٢) تتحقق ، وعليه :

$$\text{PV} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i \operatorname{Res}_0 \frac{e^{iz}}{z} = \pi i.$$

ونحصـــل بمساواة التخيلية على النتيجة المرجوة ، لأن دالة التكامل زوجية ، وأن $x = 0$ نقطة شاذة قابلة للإزالة للدالة $(\sin x)/x$.

يمكن وبنفس الطريقة حساب التكاملات المحتوية قوى الدالة $\cos ax$ أو $\sin ax$.

مثال (٤، ٤، ٢)

بيّن أن :

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

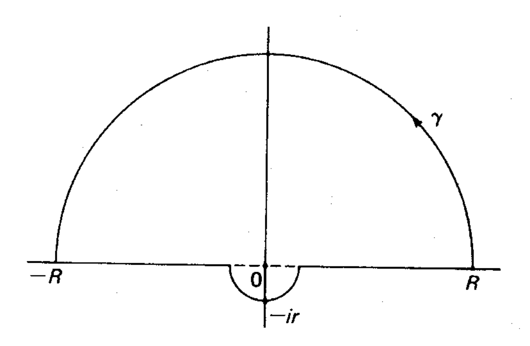
الحل

باستخدام صيغة ضعف الزاوية $2\sin^2 x = 1\text{-}\cos 2x$ ، نحصل على التكامل :

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} dx$$

الذي يتقارب بواسطة نظرية المقارنة لحساب التفاضل والتكامل (comparison theorem) ، وبمكاملة الدالة $(1\text{-}e^{2iz})/4z^2$ حول المنحنى γ الموضح بالشكل رقم (٤،٥) نحصل على :

$$\int_\gamma \frac{1 - e^{2iz}}{4z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_0 \frac{1 - e^{2iz}}{4z^2} = \pi.$$



الشكل رقم (٤,٥).

القيمة المطلقة للتكامل على المنحنى $|z| = R$ حيث $0 \le \arg z \le \pi$ ، محدودة بالقيمة :

$$\frac{1}{4R}\int_0^{\pi}\left|1-e^{2iR\,e^{i\theta}}\right|d\theta \le \frac{\pi}{2R},$$

التي تنعدم عندما $R \to \infty$ ، وبما أن :

$$\frac{1-e^{2iz}}{4z^2} = \frac{-i}{2z} + f(z)$$

لدالة $f(z)$ تحليلية على قرص مغلق مركزه 0 يحتوي على نصف الدائرة E ، فإن :

$$\left|\int_E \frac{1-e^{2iz}}{4z^2}dz - \frac{\pi}{2}\right| = \left|ir\int_{-\pi}^{0} f\left(re^{i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta\right| \le rN\pi$$

وهذا الحد ينعدم عندما $r \to 0$ ، ولهذا :

$$\text{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{2ix}}{4x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

ويكتمل الحل حينئذ .

تمارين (٤ , ٤)

احسب التكاملات بالتمارين من (١) إلى (٩) بواسطة الطريقة الموضحة بهذا البند :

(١) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos \pi x}{4x^2-1}dx = \frac{-\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x^5 - x} dx = \frac{\pi}{2}\left(e^{-\pi} - 3\right) \quad (٢)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x \cos \pi x}{2x^2 - x} dx = -\pi \quad (٣)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{x^2 + a^2}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{b^2}\left[a^2 + e^{-b}\left(b^2 - a^2\right)\right], \quad a,b > 0 \quad (٤)$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x\left(x^2 - b^2\right)} dx = \frac{\pi}{2b^2}\left(1 - e^{-b}\right), \quad b > 0 \quad (٥)$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin ax}{x\left(x^2 + b^2\right)^2} dx = \frac{\pi}{2b^4}\left[1 - \frac{e^{-ab}}{2}(ab + 2)\right], \quad a,b > 0 \quad (٦)$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \frac{b - a}{2}\pi, \quad a,b \geq 0 \quad (٧)$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{3\pi}{8} \quad (٨)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin m(x-a)}{x-a} \frac{\sin n(x-b)}{x-b} dx = \pi \frac{\sin n(a-b)}{a-b}, \quad (٩)$$

$$m \geq n \geq 0, \quad a,b \text{ real}, \quad a \neq b$$

(١٠) برهن المتطابقة:

$$\text{PV} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} dx}{x} \begin{cases} \frac{1}{2}, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -\frac{1}{2}, & t < 0, \end{cases}$$

وذلك باستخدام الطريقة الموضحة في هذا البند. وإذا أضفنا $\frac{1}{2}$ إلى هذه الدالة، نحصل على دالة النبض (impulse function)، المعتاد وجودها في كتب الهندسة (engineering books)، ممثلة بانفتاح مفاجيء للتيار في خط كهربائي بدائرة مفتوحة.

(٤,٥) تكامل الدوال متعددة القيم (اختياري)

Integration of Multivalued Functions (Optional)

عندما نتعامل مع تكاملات تحتوي على دوال متعددة القيم ، يجب أن نأخذ في الحسبان نقط التفرع (branch points) ، وقواطع التفرع (branch cuts) لدالة التكامل ، بالإضافة إلى النقاط الشاذة المنعزلة (isolated singularities) ، والسبب في ذلك أنه عند استخدام نظرية الباقي يجب أن نختار منطقة تكون دالة التكامل بداخلها وحيدة القيمة.

نظرية

إذا كانت $F(z)$ خارج قسمة كثيرتي حدود في z وتحقق :

١ - $F(z)$ ليس لها أقطاب على الجزء الحقيقي الموجب .

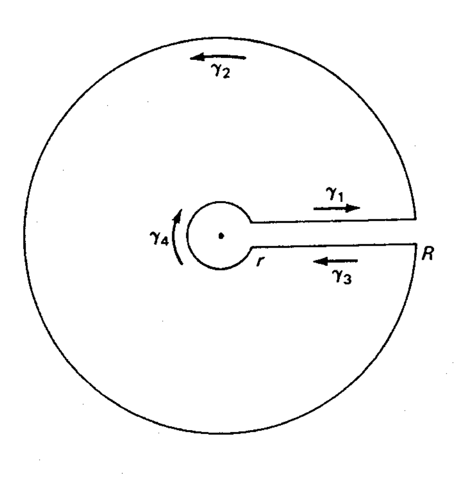
٢ - $z^{a+1}F(z)$ تنعدم عندما تؤول z إلى 0 أو ∞ ، حيث a عدد حقيقي ، وليس بعدد صحيح ، فإن :

$$\int_0^{\infty} x^a F(x)dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i a}} \sum_{z\neq 0} \text{Res}\left(z^a F(z)\right),$$

وذلك بأخذ المجموع على أقطاب الدالة غير الصفرية.

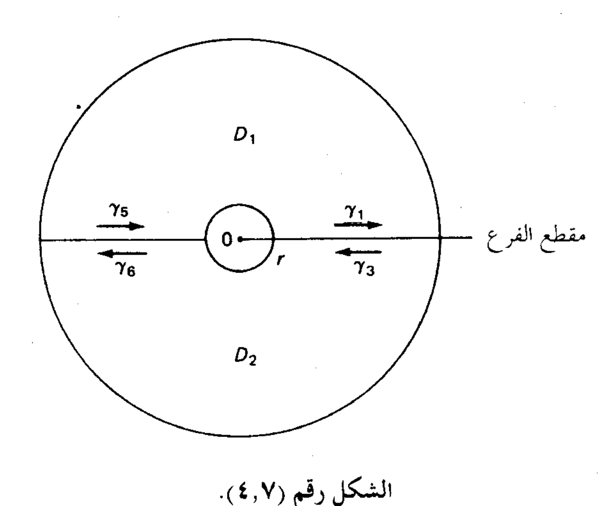
البرهان

بما أن $F(z)$ لها عدد محدود من الأقطاب في C ، فيوجد عدد $R > r > 0$ بحيث تكون كل الأقطاب غير الصفرية داخل الحلقة $r < |z| < R$ وسوف نختار للدالة z^a فرعا من $\Re$ له زاوية أساسية تقع بين 0 و 2π ونقطتي تفرع 0 و ∞. لتكن $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ تتكون من محيط المنطقة الناتجة من قطع $r < |z| < R$ على امتداد القطعة المستقيمة $r < x < R$ المدونة بالشكل (٤,٦).



الشكل رقم (٤,٦).

ولا نستطيع قطعا تطبيق نظرية الباقي مباشرة على γ لأن $z^a F(z)$ متعددة القيم على الفرع القاطع. إلا أنه يمكن تطبيق نظرية الباقي على حدود المنطقتين D_1 و D_2 الموضحتين بالشكل (٤,٧). وينعدم التكامل حول الأقواس γ_5 و γ_6. وهكذا تمتد نظرية الباقي إلى γ.



الشكل رقم (٤,٧).

لاحظ أن دالة التكامل لها قيم مختلفة على γ_1 و γ_3 وباستخدام نظرية الباقي نحصل على :

$$\int_\gamma z^a F(z)dz = 2\pi i \sum_{z\neq 0} \operatorname{Res}\left(z^a F(z)\right),$$

ولكن :

$$\left|\int_{\gamma_j} z^a F(z)dz\right| \leq \int_0^{2\pi} |\, z^{a+1} F(z)|\, d\theta, \qquad j = 2,4$$

والتي تنعدم بوساطة (٢) عندما $R \to \infty$ أو $r \to 0$، وبالتالي فإن :

$$z^a F(z) = \begin{cases} x^a F(x) & , \quad \text{على } \gamma_1 \\ x^a e^{2\pi i a} F(x) , & \quad \text{على } \gamma_3 \end{cases}$$

ولذا :

$$\int_{\gamma_1+\gamma_3} z^a F(z)dz = \left(1 - e^{2\pi i a}\right)\int_r^R x^a F(x)dx$$

تعطي الصيغة المطلوبة بجعل $R \to \infty$ و $r \to 0$.

مثال (٤,٥,١)

بيّن أن :

$$\int_0^\infty \frac{x^a dx}{x+b} = \frac{-\pi b^a}{\sin \pi a}, \qquad 0 > a > -1,\ b > 0.$$

الحل

هنا $0 < a + 1 < 1$، لذا فإنه من الواضح أن (١) و(٢) تتحقق. وباختيار الفرع من R الذي تقع زاويته بين 0 و 2π نحصل على :

$$\frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \operatorname{Res}_{-b} \frac{z^a}{(z+b)} = \frac{2\pi i b^a}{e^{-\pi i a} - e^{\pi i a}}$$

حيث إنه على هذا الفرع تكون :

$$(-b)^a = b^a e^{\pi i a}$$

ويمكن تطبيق نفس هذه الخطوات على دوال أخرى متعددة القيم . ونوضح ذلك في المثالين التاليين.

مثال (٤,٥,٢)

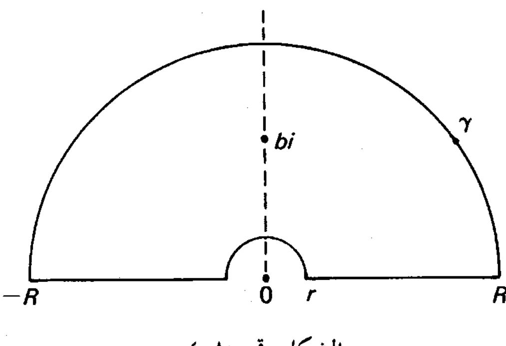
أثبت أن :

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi}{2b}\log b \quad , \quad b>0.$$

الحل

نستخدم هنا المنحنى γ المبيّن بالشكل (٤,٨)، إذن :

$$\int_\gamma \frac{\log z}{z^2+b^2}dz = 2\pi i \mathrm{Res}_{bi}\frac{\log z}{z^2+b^2} = \frac{\pi}{b}\left[\log b + \frac{i\pi}{2}\right]$$



الشكل رقم (٤,٨).

ولكن :

$$\left| iR\int_0^\pi \frac{\log R + i\theta}{\left(Re^{i\theta}\right)^2+b^2}e^{i\theta}d\theta \right| \le \frac{R\left(|\log R|+\pi\right)}{|R^2-b^2|}\pi,$$

وهذا ينعدم عندما $R \to \infty$ أو 0 بوساطة نظرية لوبيتال (L'Hospital's theorem)، وبما أن التكامل متقارب فإن:

$$\frac{\pi}{b}\left[\log b+\frac{i\pi}{2}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log x\,dx}{x^2+b^2}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log|x|}{x^2+b^2}dx+i\pi\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+b^2},$$

ومنها تأتي النتيجة المرغوبة لأن دالة التكامل الأولى دالة زوجية.

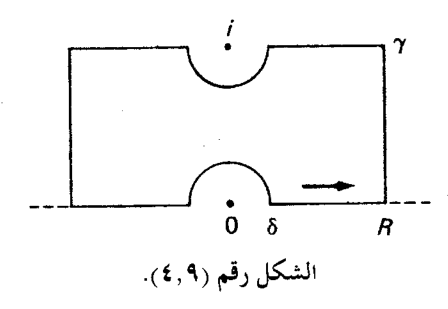
مثال (٤,٥,٣)

أثبت أن:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sinh\ ax}{\sinh\ \pi x}dx=\frac{1}{2}\tan\frac{a}{2},\qquad -\pi<a<\pi$$

الحل

ينعدم تكامل الدالة $e^{az}/\sinh\pi z$ على المنحنى γ المبيّن بالشكل (٤,٩) نتيجة لعدم وجود نقطة شاذة داخل γ.



الشكل رقم (٤,٩).

لكن

$$|\sinh\pi\,(R+iy)|\geq|\sinh\pi R|$$

(انظر تمرين (٢٧)، البند (١,٨)) يؤدي إلى أن:

$$\left|\int_R^{R+i} \frac{e^{az}}{\sinh \pi z} dz\right| \le \frac{e^{aR}}{|\sinh \pi R|} \to 0$$

عندما $R \to \pm\infty$. ولأن $i \sinh z = \sin iz$، فإن $1/\sinh \pi z$ لها قطب من الرتبة 1 عند كل المضاعفات الصحيحة للعدد i، وعليه:

$$\text{Res}_0 \frac{e^{az}}{\sinh \pi z} = \lim_{z\to 0} \frac{ze^{az}}{\sinh \pi z} = \frac{1}{\pi}$$

و:

$$\text{Res}_i \frac{e^{az}}{\sinh \pi z} = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)e^{az}}{\sinh \pi z} = \frac{-e^{ai}}{\pi}$$

وذلك باستخدام نظرية لوبيتال. بالتكامل فوق نصفي الدائرتين نحصل على:

$$-\pi i\left(\frac{1}{\pi} - \frac{e^{ai}}{\pi}\right)$$

بالإضافة إلى التكامل الذي انعدم عندما $\delta \to 0$. ولكن:

$$\sinh \pi(x+i) = -\sinh \pi x,$$

ولذا نحصل على:

$$\text{PV}\left(1+e^{ai}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\sinh \pi x} dx = i\left(1-e^{ai}\right),$$

أو:

$$\text{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\sinh \pi x} dx = \tan\frac{a}{2}$$

التي تعطي النتيجة لأن دالة التكامل في المعادلة الأصلية دالة زوجية.

تمارين (٥,٤)

احسب التكاملات بالتمارين من (١) إلى (١٦)، باستخدام الطريقة الموضحة في هذا الجزء:

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(x+b)^2}\,dx = \frac{\pi a b^{a-1}}{\sin \pi a}, \quad 1 > a > -1, \quad b > 0 \quad (١)$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ay}\,dy}{1+be^{-y}} = \frac{-\pi b^a}{\sin \pi a}, \quad 0 > a > -1, \quad b > 0 \quad (٢)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a\,dx}{x^2+b^2} = \frac{\pi b^{a-1}}{2\cos\frac{\pi a}{2}}, \quad 1 > a > -1, \quad b > 0 \quad (٣)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a\,dx}{x^2+2x\cos\theta+1} = \frac{\pi}{\sin \pi a}\frac{\sin \theta a}{\sin\theta}, \quad (٤)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a\,dx}{(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi b^{a-3}(1-a)}{4\cos\frac{\pi a}{2}}, \quad 3 > a > -1, \quad b > 0 \quad (٥)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a\,dx}{x^3+b^3} = \frac{2\pi b^{a-2}}{3\sin \pi a}\left[\cos\frac{\pi}{3}(1-2a) - \frac{1}{2}\right], \quad (٦)$$

$2 > a > -1, \quad b > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+b^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4b^3}(\log b - 1), \quad b > 0 \quad (٧)$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a \log x}{x+b}\,dx = \frac{\pi b^a}{\sin^2 \pi a}(\pi\cos \pi a - \sin \pi a \log b), \quad (٨)$$

$0 > a > -1, \quad b > 0$

$$\int_0^\infty \frac{x^a \log x}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi b^{a-1}}{2\cos^2\frac{\pi a}{2}}\left[\frac{\pi}{2}\frac{\sin \pi a}{2} + \log b\ .\cos\frac{\pi a}{2}\right], \quad (٩)$$

$1 > a > -1, \quad b > 0$

$$\int_0^\infty \frac{x}{\sinh x}\,dx = \frac{\pi^2}{4} \quad (١٠)$$

(١١) a حقيقي، $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sinh x}\,dx = \frac{\pi}{2}\tanh\frac{a\pi}{2}$

(١٢) a حقيقي، $\int_0^\infty \frac{x\cos ax}{\sinh x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}\operatorname{sech}^2\frac{a\pi}{2}$

(١٣) $-\pi < a < \pi$ ، $\int_0^\infty \frac{\cosh ax}{\cosh \pi x}\,dx = \frac{1}{2}\sec\frac{a}{2}$

(١٤) $$\int_0^\infty x^{a-1}\begin{Bmatrix}\cos ab\\ \sin ab\end{Bmatrix}dx = \begin{Bmatrix}\cos\frac{\pi a}{2}\\ \sin\frac{\pi a}{2}\end{Bmatrix}.\frac{\Gamma(a)}{b^a}, 1 > a > 0,\ b > 0,$$

حيث $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}ax$ هي دالة جاما "gamma function".

(**إرشاد للحل**: كامل $z^{a-1}.e^{-bz}$ حول مسار مناسب واستخدم المتباينة $\cos\theta \geq 1-(2/\pi)\theta$ حيث $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

(١٥) $$\int_0^\infty \frac{\sin x^a}{x^a}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)\cos\frac{\pi}{2a}}{a-1}, \qquad 1 > a > \frac{1}{2}$$

(**إرشاد للحل**: بيّن أن $x\,\Gamma(x) = \Gamma(x-1)$ بالتكامل بالتجزيء)؟

(١٦) $$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{2x}}\,dx$$

(١٧) برهن أن:

$$\int_0^{\pi/2}(\tan\theta)^a\,d\theta = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi a}{2}}, \qquad 1 > a > -1,$$

و

$$\int_0^{\pi/2}\log\tan\theta\,d\theta = 0$$

(**إرشاد للحل**: استخدم تمرين (٣)).

(٤,٦) مبدأ اختلاف الزوايا

The Argument Principle

يوجد تطبيق آخر مفيد لنظرية الباقي لحساب عدد الجذور والأقطاب لدالة شبه تحليلية (meromorphic function) ونقدم النتيجة التالية :

مبدأ اختلاف الزوايا (The argument principle)

لتكن $w=f(z)$ دالة شبه تحليلية في منطقة بسيطة الترابط G، (simply connected region) و γ منحنى جوردان الأملس جزئيا (pws Jordan curve) في G والذي يتجنب جذور وأقطاب $f(z)$.

إذن :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{f(\gamma)}\frac{dw}{w}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)dz}{f(z)}=Z-P,$$

حيث Z وP هي بالترتيب، عدد الجذور والأقطاب، آخذين في الاعتبار تكرارها، للدالة $f(z)$ داخل γ.

البرهان

لاحظ أن التكامل الأول يساوي عدد مرات دوران المنحنى المغلق (γ) f حول0. وبمعنى آخر يقيس الاختلاف في الزاوية للدالة $f(z)$ عندما تتحرك z على المنحنى γ والذي يعزى إلى مسمى النظرية (انظر مثال (٢,١,٤) من البند (٢,١).

إذا كان a جذرا من الرتبة k للدالة $f(z)$، فإننا نكتب :

$f(z)=(z-a)^k f_0(z)$ حيث $f_0(z)$ دالة تحليلية ولا تنعدم في جوار -ε للنقطة a، وعليه :

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{k}{z-a}+\frac{f_0'(z)}{f_0(z)},$$

وبما أن $f_0' \,/\, f_0$ تحليلية في جوار -ε للنقطة a، فإننا نرى أن f'/f لها قطب من الرتبة 1 ولها باقي يساوي k عند $z = a$.

ومن جهة أخرى، إذا كان a قطبا من الرتبة h للدالة $f(z)$ فإن $f(z)=f_0(z)/(z-a)^h$ حيث لا تنعدم $f_0(z)$ مرة أخرى وتكون تحليلية في جوار -ε عند a. ولذا:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-h}{z-a} + \frac{f_0'(z)}{f_0 z},$$

لها قطب من الرتبة 1 والباقي $(-h)$ عند $z = a$. باستخدام نظرية الباقي ينتج أن:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z - P$$

حيث Z مجموع كل الرتب k لجذور الدالة $f(z)$ وP هي مجموع كل الرتب h لأقطاب $f(z)$ الواقعة داخل γ. ■

كتطبيق لمبدأ اختلاف الزوايا، النتيجة التالية في غاية الفائدة.

نظرية روشيه (Rouche's theorem)

لتكن $f(z)$ و $g(z)$ دالتين تحليليتين في منطقة بسيطة الترابط G. وإذا كانت $|f(z)|>|g(z)-f(z)|$ لنقاط منحنى جوردان الأملس جزئيا γ الواقع في G، فإن $f(z)$ و$g(z)$ لهما نفس العدد من الجذور داخل γ.

البرهان

يجبر الفرض $|f(z)| > |g(z) - f(z)|$ كلا من الدالتين على ألا تنعدم على γ. إذن γ تتجنب الأقطاب والجذور للدالة $F(z) = g(z) / f(z)$. إلا أننا نجد لكل z على γ:

$$|(g(z)/f(z)) - 1| < 1$$

إذن لا تدور $F(\gamma)$ حول 0، وعليه يؤدي مبدأ اختلاف الزوايا إلى أن $F(z)$ لها نفس العدد من الجذور مثل ما لها من أقطاب داخل γ. ولكن هذا يناظر الجذور للدوال $g(z)$ و$f(z)$ على الترتيب، وهكذا يكتمل البرهان. ■

مثال (٤,٦,١)

أوجد عدد الجذور للمعادلة:

$$z^4 + 5z + 1 = 0$$

الواقعة داخل الدائرة $|z| = 1$.

الحل

لتكن $f(z) = 5z$ و$g(z) = z^4 + 5z + 1$ إذن، ومن المتراجحة المثلثية نحصل على:

$$|g(z) - f(z)| \le |z|^4 + 1 < |5z| = |f(z)|$$

وذلك على $|z| = 1$. وبما أن $f(z)$ لها جذر واحد داخل $|z| = 1$ فإن $g(z)$ تكون أيضا كذلك. ومن ناحية أخرى بجعل $f(z) = z^4$ نحصل على

$$|5z + 1| \le 11 < 16 = |z|^4$$

على $|z| = 2$، وهكذا يكون للدالة $g(z)$ أربعة جذور داخل $|z| = 2$؛ ثلاثة منها تقع في الحلقة $1 < |z| < 2$ حيث لا توجد أصفار على $|z| = 1$.

مثال (٤,٦,٢)

بيّن أن $z - e^z + a = 0$، حيث $a > 1$ لها جذر واحد في النصف الأيسر من المستوى.

الحل

لتكن $f(z) = z + a$ و$g(z) = z - e^z + a$، ولقيم $z = iy$ و$|z| = R > 2a$، حيث $x < 0$، نحصل على:

$$|g(z) - f(z)| = e^{\text{Re}\, z} \leq 1 < a < |f(z)|$$

و $f(z)$ لها جذر واحد لا غير (عند $z = -a$) ولذا يكتمل البرهان.

مثال (٤,٦,٣)

أوجد عدد الجذور للمعادلة:

$$z^4 + iz^3 + 3z^2 + 2iz + 2 = 0$$

الواقعة في النصف العلوي للمستوى.

الحل

لتكن $f(z) = z^4 + 3z^2 + 2 = (z^2 + 2)(z^2 + 1)$ و $g(z) = z^4 + iz^3 + 3z^2 + 2iz + 2$

لقيم $z = x$ أو $|z| = R \quad 2$ ، نحصل على:

$$|g(z) - f(z)| = |z|\,|z^2+2| < |z^2 + 1|\,|z^2 + 2| = |f(z)|$$

وعليه فإن $g(z)$ لها جذران في النصف العلوي للمستوى.

مثال (٤,٦,٤)

أوجد عدد جذور المعادلة:

$$7z^3 - 5z^2 + 4z - 2 = 0$$

في القرص $|z| \leq 1$.

الحل

إذا ضربنا المعادلة في المقدار $(z + 1)$ نحصل على:

$$7z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z - 2 = 0$$

بجعل $f(z) = 7z^4$ و $g(z) = 7z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z - 2$، فإننا نجد بوساطة المتباينة المثلثية أن:

$$|g(z) - f(z)| \leq 2\,|z|^3 + |z|^2 + 2|z| + 2 < 7\,|z|^4 = |f(z)|,$$

وذلك إذا كانت $\varepsilon > 0$ و$|z| = 1 + \varepsilon$. إذن $g(z)$ لها أربعة جـذور في $|z| \leq 1$، يؤدي ذلـك إلى أن المعادلة الأصلية لها ثلاثة جذور في قرص الوحدة المغلق.

تمارين (٤,٦)

أوجـد في التمـارين من (١) إلى (٤) عـدد الجـذور للمعـادلات المعطـاة داخـل الدائرة $|z| = 1$:

(١) $z^5 + 8z + 10 = 0$

(٢) $z^8 - 2z^5 + z^3 - 8z^2 + 3 = 0$

(٣) $z^6 + 3z^5 - 2z^2 + 2z - 9 = 0$

(٤) $z^7 - 7z^6 + 4z^3 - 1 = 0$

(٥) كم عدد الجـذور للمعـادلات المعطاة في التمـارين مـن (١) إلى (٤) الواقعـة داخـل $|z|=2$؟ .

(٦) كم عدد جذور المعادلة :

$$3z^4 - 6iz^3 + 7z^2 - 2iz + 2 = 0$$

التي تقع في نصف المستوى العلوي؟

(٧) كم عدد جذور المعادلة :

$$z^6 + z^5 - 6z^4 - 5z^3 + 10z^2 + 5z - 5 = 0$$

الواقعة في نصف المستوى الأيمن؟

(٨) أوجد عدد الجذور للمعادلة :

$$9z^4 + 7z^3 + 5z^2 + z + 1 = 0$$

الواقعة في القرص $|z| \leq 1$.

(٩) كم عدد جذور المعادلة :

$$z^4 + 2z^3 - 3z^2 - 3z + 6 = 0$$

التي تقع في القرص $|z| \leq 1$.

(١٠) بيّن أن الدالة :

$$f(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \quad , \qquad |a|<1,$$

تأخذ في $|z|<1$ كل قيم c التي تحقق $|c|<1$ مرة واحدة بالتمام، ولا توجد قيم حيث $|c|>1$، وهكذا تصور $f(z)$ المجموعة $|z|<1$ تصويرا أحاديا إلى نفسها.

(**إرشاد الحل**: بيّن أن $|f(z)|=1$ على $|z|=1$ وطبّق نظرية روشيه على $f(z)-c$).

(١١) بفرض أن شروط مبدأ اختلاف الزوايا محقق، بيّن أن عدد مرات دوران $f(\gamma)$ حول النقطة a يساوي $(z_a-\rho)$ حيث z_a عدد قيم a من المرات للدالة $f(z)$ محتويا التكرار.

(١٢) لتكن $f(z)$ تحليلية في المنطقة G و a في G، افرض أن $f(z)-f(a)$ لها جذر من الرتبة n عند $z=a$. برهن أنه يوجد لقيم $\varepsilon>0$ الصغيرة جدا العدد $\delta>0$ بحيث إنه لكل ζ في $|\zeta-f(a)|<\delta$ يكون للمعادلة $f(z)-\zeta=0$ بالضبط n من الجذور في $|z-a|<\varepsilon$.

(١٣) استخدم نتيجة تمرين (١٢) لبرهان أن الدوال التحليلية غير الثابتة تصور المجموعات المفتوحة إلى مجموعات مفتوحة، واستخدم هذه الحقيقة لتحصل على برهان مباشر لمبدأ القيم العظمى (maximum principle).

(**إرشاد للحل**: بيّن أن النقط الداخلية تصور إلى نقط داخلية).

(١٤) استخدم نظرية روشيه لبرهان النظرية الأساسية للجبر (fundamental theorem of algebra).

ملاحظات

البند (٤,١)

يمكن أن تعمم النتائج في هذا البند بسهولة إلى منحنيات مغلقة ملساء جزئيا في C (pws closed curves). إلا أنه في أغلب التطبيقات تكون γ منحنى جوردان . وعليه، فإن هذا الفرض الإضافي لم يساعدنا في تبسيط نصوص النظريات ولنص أكثر عموما، انظر [A, pp. 147-151] .

البنود من (٤,٢) إلى (٤,٥)

ربما لاحظ القارئ أن عدد التكاملات التي تعتمد على متغير أو أكثر من متغير اختياري، يمكن أن تأتي بواسطة التفاضل أو التكامل لتكاملات أخرى بالنسبة إلى هذه المتغيرات الوسيطة (parameters)، ومن ذلك على سبيل المثال: التمرينان (١) و(٢) بالبند (٤،٢)، المثالان (٤،٣،١) و(٤،٣،٢) بالبند (٤،٣)، والتمرينان (٨) و(٩) بالبند (٤،٣)، والتمرينان (٥) و(٦) بالبند (٤،٤)، والتمرينان (٣) و(٥) بالبند (٤،٥)، وهناك شرط كافٍ لتحقيق هذه الخطوات هو التقارب المنتظم للتكامل على فترة التعريف للمتغيرات الوسيطة. ويمكن أن توجد النظريات المناسبة والبراهين في أغلب كتب التفاضل والتكامل المتقدمة. مثال ذلك أنظر [B, 3p. 204-212]. وهذه الطريقة عادة ما تكون أيسر من حساب التكاملات بواسطة طريقة الباقي.

البند (٤,٦)

ربما تعمم هذه النتائج إلى منحنيات مغلقة ملساء جزئيا، انظر [A, pp. 151-153].

الفصل الخامس

الـــــدوال حافظــة الزوايــا
CONFORMAL MAPPINGS

(٥,١) اعتبارات هندسية
Geometric Considerations

دعنا نبحث التغير في الميـل لقوس أملس يمر بنقطة z تحت تأثـــــير الدالة $w=f(z)$ ، عندما تكون f تحليلية عند z_0 و $f'(z)\neq 0$.

فإذا كانت $\gamma : z=z(t)$ و $z(0)=z_0$ ، هو هذا القوس ، فإن ميل المماس عند z_0 هو:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(0)}{x'(0)}=\tan \arg z'(0)$$

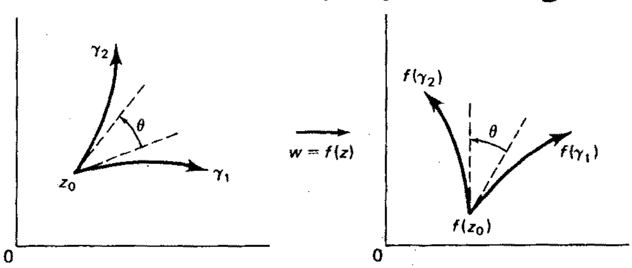
وصورته $f(\gamma) : w=f(z(t))$ ، لها المماس عند $f(z_0)$ الذي يساوي ميله $\tan \arg w(\theta)$.
ولكن بوساطة قاعدة السلسلة نجد أن :

$$\arg w'(0) \arg[f'(z0)z'(0)=\arg f'(z_0)+\arg z'(0)$$

إذن ، يساوي التغير في الاتجاه المقدار الثابت $\arg f'(z_0)$ "مستقلا عن القوس المختـار".
وهكذا ، تحفظ الزاوية المكونة بوساطة المماسين لمنحنيين أملسين متقاطعين عنـد z_0 تحت تأثير الدالة $w=f(z)$ نتيجة لتغير كـلا الاتجاهين بنفس المقدار (انظر الشكل رقـم (٥,١)). (تسمى الدالة التي تحفظ قيمة الزاوية واتجـاه دورانـها "بحافظـة الزوايـا") ، وبذلك نكون قد برهنا النظرية التالية.

نظرية

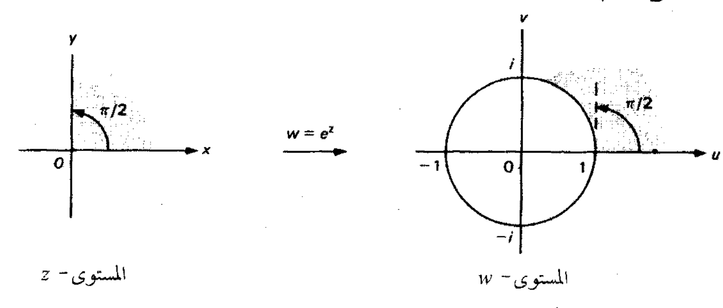
إذا كانت $f(z)$ تحليلية في منطقة G، فإن $w=f(z)$ دالة حافظة للزوايا عند كل النقاط z_0 من G والتى عندها $f'(z_0) \neq 0$



الشكل رقم (٥,١). دالة حافظة للزوايا عند z_0.

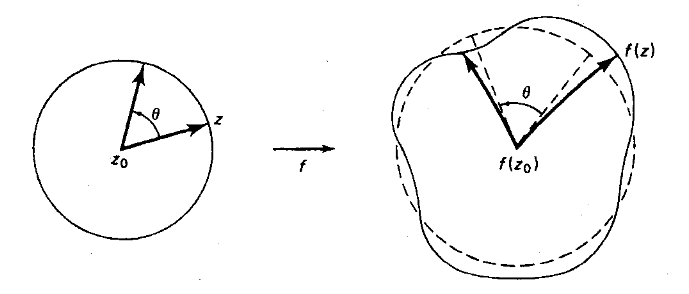
مثال (٥, ١, ١)

الدالة $w = e^z$ حافظة للزوايا عند كل نقاط C، لأن مشتقاتها غير معدومة. وتصور الدالة الجزء الحقيقيّ من المستوى -z إلى الأعداد الحقيقية الموجبة في المستوى -w ويصور المحور التخيلي في المستوى -z على دائرة الوحدة بالتكرار في المستوى -w لأن $|e^{iy}| = 1$. وهكذا تنقل الزاوية القائمة بين المحورين في الربع الأول من المستوى -z إلى الزاوية القائمة بين المحور الحقيقي الموجب ودائرة الوحدة في الربع الأول من المستوى -w (انظر الشكل رقم (٥,٢)).



الشكل رقم (٥,٢). الدالة الحافظة للزوايا $w = e^z$.

لتكن $w = f(z)$ دالـة حافظة للزوايـا في منطقـة G تحتـوي علـى النقطـة z_0. اعتبر تأثير هذه الدالة على قرص متمركز عند z_0 وواقع في G (انظر الشكل رقم (٥,٣)).



الشكل رقم (٥,٣). تصوير قرص له المركز z_0.

وقـد حفظـت الزوايـا بـين الأقطـار علـى الرغـم مـن أن قيمـة أطوالهـا لم تحفـظ. ولكن، وبما أن:

$$\left|f'(z_0)\right| = \lim_{z \to z_0} \frac{\left|f(z) - f(z_0)\right|}{\left|z - z_0\right|},$$

فإن الأقطـار تكون خاضعة تقريبا لنفس التغير بالمقياس $\left|f'(z_0)\right|$ عندما يكـون نصف القطر صغيرا، وبصورة تقديرية، فإن الدوائر الصغيرة حـول z_0 تصوّر إلى دوائر صغيرة حول $f(z_0)$، وتتغير في مقياس الرسم بمقدار $\left|f'(z_0)\right|$. وأكثر من ذلك، يشير هذا إلى أن الدالة أحـادية محليا. بالرغـم من أنه ليس من الواضـح معرفة سـلوكها بشـكل كلي. فعلـى سبيل المثـال $f(z) = e^z$ أحاديــة محليــا لأن $f'(z) = e^z \neq 0$ ، ولكن $f(0) = f(2\pi i)$، وعليه فإنها ليست أحادية على $\boldsymbol{C}$.

تكبر الزوايا عند كل النقط التي ينعدم عندها الاشتقاق. مثال ذلك $f(z) = z^2$ لها مشتقة لا تنعدم عند نقطة الأصل. وبما أن $f(1) = f(-1) = 1$ و $f(i) = f(-i) = -1$ ، فإن الزوايا القائمة بين المحاور تصور إلى زوايا مقدارها ١٨٠° وهذا التضاعف في الزوايا

يسبب تصويرا للدوائر حول نقطة الأصل إلى منحنيات دائرية تدور حول نقطة الأصل مرتين ويبرر تقديم النظرية التالية.

نظرية

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة G تحتوي على النقطة z_0 والتي للدالة $f(z)$ عندها جذر من الرتبة k . إذن الزوايا عند z_0 تتضاعف بالمعامل $k+1$.

البرهان

يمكن كتابة $f'(z)=(z-z_0)^k g(z)$ حيث g تحليلية ولا تساوي صفرا في جوار ε- للنقطة z_0. وهكذا تنعدم الحدود $f'(z_0)$ و $f''(z),\ldots,f^k(z_0)$ كلها في متسلسلة تيلور للدالة $f^k(z_0)$، إذن مفكوك تيلور للدالة $f(z)$ هو :

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{k+1}+\ldots,$$

ويؤدي ذلك إلى أن

$$\arg[f(z)-f(z_0)]=(k+1)\arg(z-z_0)+\arg\left[\frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)\,!}+..\right]$$

تقارن العبارتان الأوليتان الزوايا بين الاتجاه الأفقي والمتجه المرسوم من $f(z_0)$ إلى $f(z)$ ومن z_0 إلى z . إذا كانت z تؤول إلى z_0 على امتداد متجه ثابت يصنع زاوية θ مع الاتجاه الأفقي فإن الزاوية للمتجه من $f(z_0)$ إلى $f(z)$ مع الأفقي تؤول إلى :

$$(k+1)\theta+\arg\left[\frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}\right]$$

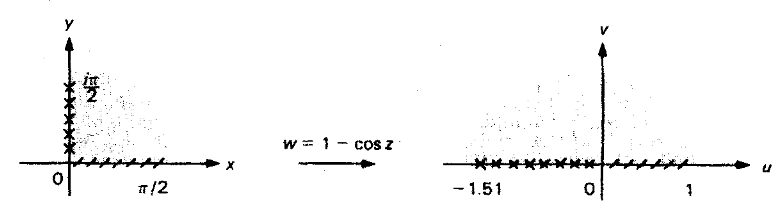
والزاوية الأخيرة مستقلة عن θ. إذن تتضاعف الزاوية بين المماسين للمنحنيين المتقاطعين عند z_0 بالمعامل $k+1$. ■

مثال (٢, ١, ٥)

الدالة $w = 1 - \cos z$ شاملة entire وحافظة للزوايا إلا عند الجذور ... $0, \pm \pi, \pm 2\pi, ...$ للمشتقة $(1 - \cos z)' = \sin z$. ولفحص سلوك هذه الدالة عند $z = 0$، لاحظ أن $\sin z$ لها جذر من الرتبة الأولى عند $z = 0$:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... = z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + ...\right).$$

وتؤدي النظرية السابقة إلى أن $w = 1 - \cos z$ تضخم كل الزوايا عند $z = 0$ بمقدار الضعفين. لاحظ في شكل (٥,٤) أن الزاوية القائمة بين محوري الإحداثيات في الربع الأول نقلت إلى زاوية مقدارها $180°$، لأن $1 - \cos x > 0$ عندما تكون $0 < x < \pi/2$ و $1 - \cos iy = 1 - \cosh y < 0$ عندما تكون $0 < y < \pi/2$.



الشكل رقم (٥,٤). السلوك المحلي للدالة $w = 1 - \cos z$ عند $z = 0$

ورجوعا إلى الخواص الكلية (global)، فمن المعقول أن نسأل متى تصور منطقة معطاة G تصويرا حافظا للزوايا فوق منطقة H ؟ والنتيجة التالية، التي برهانها يتجاوز مستوى هذا الكتاب نتيجة أساسية في هذا الاتجاه.

نظرية التصوير لريمان (Riemann mapping theorem)

لتكن z_0 نقطة ما في منطقة بسيطة الاتصال (simply connected region) $G(\neq C)$ إذن توجد دالة تحليلية أحادية وحيدة $w = f(z)$ تنقل G إلى القرص $|w| < 1$ بحيث إن $f(z_0) = 0$ و $f'(z_0) > 0$.

افترض الآن أن G وH منطقتان بسيطتا الاتصال مختلفتان من C.

تؤكد النظرية وجود دوال تحليلية g وf تنقل كلا من G وH إلى قرص الوحدة. وعليه $g^{-1}f$ أحادية تأخذ G إلى H. وإذا تمكنا من أن نبيّن أن g^{-1}، (وعليه الدالة المركبة $(g^{-1}f)$)، دالة تحليلية، فإننا نحصل على دالة حافظة للزوايا من G إلى H مبرهنين على أن "أي منطقتين متصلتين بسيطتين مختلفتين من المستوى، يمكن أن تصور إحداهما إلى الأخرى تصويرا حافظا للزوايا، وبما أن g دالة حافظة للزوايا (فإنها أحادية وتحليلية) وعليه فإن g^{-1} كذلك أيضا وتبيّن نظرية الدالة العكسية لحساب التفاضل والتكامل (انظر [B, P. 278]) أن g^{-1} لها مشتقات متصلة من الرتبة الأولى، وتحقق معادايت كوشي - ريمان لأن:

$$x_u = \frac{1}{u_x} = \frac{1}{v_y} = y_v \qquad y_u = \frac{1}{u_y} = \frac{-1}{v_x} = -x_v$$

إذن الدالة g^{-1} تحليلية.

ويؤدي الشرطان $f(z_0) = 0$ و$f'(z_0) > 0$ إلى أن صورة أي قوس أملس يمر بالنقطة يكون لها نفس الميل عند 0 مثل ما للمنحنى γ عند z_0، لأن $\arg f'(z_0) = 0$. ولا يعتبر هذا قيدا ولكنه تعديل (normalization) يبين وجود ثلاث درجات من الحرية لاختيار الدالة: محور السينات ومحور الصادات للنقطة z_0 والتغير في اتجاه الزوايا. وإذا رغبنا في تغيير الاتجاه بزاوية θ، فإننا نحتاج إلى ضرب الدالّة في الثابت الذي مقاسه الوحدة $e^{i\theta}$ لا غير.

على الرغم من أن نظرية ريمان للتصوير تؤكد وجود تقابل حافظ للزوايا من المنطقة المعطاة إلى قرص الوحدة، فإنها لا تبيّن كيف نوجد هذا التقابل. ويمكن أن يمثل بناء الدالة صعوبة عظيمة.

كُرّس المتبقي من هذا الفصل لبناء بعض الدوال حافظة الزوايا المعينة وتطبيقاتـها على جريان السوائل، وسريان الحرارة والكهربية الساكنة.

تمارين (٥,١)

بيّن في التمارين من (١) إلى (٤) أين تكون الدوال حافظة الزوايا:

(١) $w = e^z$ (٢) $w = \sin z$

(٣) $w = 1/z$ (٤) $w = z^2 - z$

صف تأثير كل من الدوال المذكورة بالتمارين من (٥) إلى (٨) في الزاوية القائمة بين محوري الإحداثيات بالربع الأول:

(٥) $w = z^3 \sin z$ (٦) $w = z - \sin z$

(٧) $w = e^z - z$ (٨) $w = e^{z^2} - \cos z$

(٩) بيّن أن الصورة تحت تأثير الدالة $w = z^2$ للدائرة $|z - r| = r$ و $r > 0$ هي منحنى القلب cardiod الذي معادلته القطبية هي $\rho = 2r^2 (1 + \cos \theta)$.

(١٠) وضح أن الدالة $w = z + 1/z$ تصور الدوائر $|z| = r$ إلى القطاعات الناقصة:

$$\frac{x^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1$$

(١١) إذا كانت $w = f(z)$ دالة تحليلية، بيّن أن محددة التحويل Jacobin تحقق:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |f'(z)|^2$$

(١٢) لتكن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالـة حافظـة للزوايـا، ولهـا مشـتقات متصلـة مـن الدرجة الأولى u_x, u_y, v_x, v_y في المنطقة G. بيّن أن $f(z)$ تحليلية في G.

(**إرشاد للحل**: بيّن أن معادلتي كوشي وريمان تتحققان)..

(١٣) لماذا تذكر نظرية ريمان للتصوير أنه من غير الممكن أن نصور المستوى المركّب البسيط المتصل C تصويرا حافظا للزوايا إلى قرص الوحدة؟

(١٤) تكون المنطقة G محدبة (covex) إذا كانت القطعة المستقيمة بين أي نقطتين في G تقع في G. برهن نظرية نوشيرو وارشافسكي (Noshiro-warshowski): افترض أن $w=f(z)$ تحليلية في منطقة محدبة G.

إذا كانت $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ لكل z في G، فإن f أحادية في G.

(**إرشاد للحل**: عبّر عن $f(z_1) - f(z_2)$ كتكامل).

(١٥) استخدم التمرين (١٤) لإثبات أنه إذا كانت f تحليلية عند z_0 و $f'(z) = 0$، فإنه يوجد جوار للنقطة z_0 تكون فيه f أحادية.

(٥,٢) التحويلات الكسرية الخطيّة

Linear Fractional Transformation

يُعطى أبسط نوع من الدوال الحافظة للزوايا وأهمها باستخدام التعبير:

$$w = w(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad\text{-}bc \neq 0,$$

حيث a، b، c و d ثوابت مركبة. وتسمى مثل هذه الدالة بتحويل كسري خطّي. والشرط $ad - bc \neq 0$ يمنع مشتقتها.

$$w' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

من الانعدام، وخلاف ذلك تكون الدالة ثابتة. ويمكننا الحل بالنسبة إلى z والحصول على:

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a},$$

وباستخدام المصطلح $w(\infty) = a/c$ و $w(-d/c) = \infty$ ينتج أن w تصور $\boldsymbol{m}$ (كرة ريمان) بشكل أحادي إلى نفسها. وأكثر من ذلك تكون الدالة حافظة للزوايا باستثناء النقطتين $z = -d/c$ و $z = \infty$ لأنه عند هاتين النقطتين تكون $w' = \infty$ أو $w' = 0$.

مثال (١,٢,٥)

اعتبر التحويل الكسري الخطي:

$$w = \frac{z-1}{z+1}$$

أوجد صورا للنقاط ∞، $-2i$ و i. ما النقاط التي تكون صورها على الترتيب ∞، 1 و0؟

الحل

لدينا:

$$i \to \frac{i-1}{i+1} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{2i}{2} = i \quad \text{و} \quad -2i \to \frac{-2i-1}{-2i+1} = \frac{3-4i}{5}$$

وبكتابة:

$$w = \frac{1-(1/z)}{1+(1/z)},$$

فإننا نرى أن صورة ∞ هي 1. ولإيجاد النقط التي صورتها 0، نلاحظ أن $z = 1$ تجعل البسط ينعدم في الطرف الأيمن من التحويل الكسري الخطي. إذن 1 تصور إلى 0. بالمثل عند 1- ينعدم المقام، وعليه صورة 1- هي ∞.

تحصيل تحويلين كسريين خطيين هو تحويل كسري خطي، لأن:

$$\frac{a\left(\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)+b}{\left(\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)+d} = \frac{(a\alpha+b\gamma)z+(a\beta+b\delta)}{(c\alpha+d\gamma)z+(c\beta+d\delta)}$$

حيث :

$$(a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\gamma) = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$$

وأي تحويل كسري خطي هو تحصيل لأربعة أنواع خاصة من التحويلات التالية :

(١) الانسحاب : $w = z + \alpha$ ، α عدد مركّب.

(٢) الدوران : $w = e^{i\theta} z$ ، θ عدد حقيقي.

(٣) التكبير : $w = kz$ ، $k > 0$

(٤) الانعكاس : $w = 1/z$

وإذا كانت $c \neq 0$ ، فإننا يمكن أن نكتب :

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{bc-ad}{c^2\left(z+\dfrac{d}{c}\right)} + \frac{a}{c},$$

وهذا يوضّح أن التحويل يمكن أن يتألف من انسحاب بالمقدار d/c ، متبوع بدوران بالكمية $e^{2i\arg c}$ ، وتكبير $|c|^2$ ، ثم انعكاس ، ودوران ، وتكبير وانسحاب.

إذا كانت $c = 0$ ، فإن :

$$\frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}\left(z+\frac{b}{a}\right),$$

يبرهن على أن التركيب يتألف من انسحاب ، ودوران وتكبير.

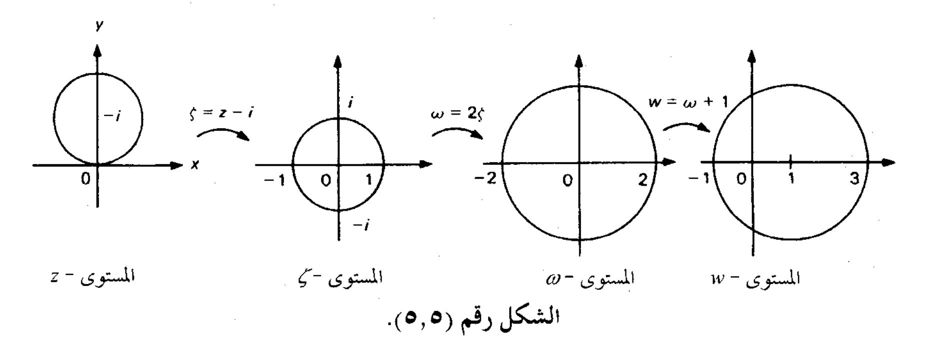
مثال (٥,١,٢)

أوجد التحويل الكسري الخطي الذي يصوّر الدائرة $|z - i| = 1$ إلى الدائرة $|w + 1| = 2$.

الحل

اعتبر المتتابعة من التحويلات الكسرية الخطية الموضحة في الشكل (٥.٥):

انسحاب $\zeta = z - i$.



الشكل رقم (٥,٥).

متبوع بالتكبير $\omega = 2\zeta$ ، ويليه انسحاب آخر $w = \omega + 1$، وتحصيل هذه الدوال الثلاث هو:

$$w = \omega + 1 = 2\zeta + 1 = 2(z - i) + 1$$

أو:

$$w = 2z + (1 - 2i)$$

ويصور هذا التحويل الكسري الخطي $|z - i| = 1$ إلى $|w + 1| = 2$.

الخاصية الأساسية للتحويلات الكسرية الخطية هي تصوير الدوائر إلى دوائر في $\boldsymbol{m}$. تقابل الدائرة في $\boldsymbol{m}$ دائرة أو خطا مستقيما في $\boldsymbol{C}$ ، وذلك مثل الخطوط في المستوى تقابل دوائر تمر خلال ∞ على كرة ريمان (انظر البند (٣, ١)). وهندسيا ، واضح أن الانسحابات والدوران تحمل الدوائر إلى دوائر. وقبل أن نعتبر التحويلين الأخيرين ، لاحظ أنه يمكن كتابة الخط $y = \tan \theta . x + b$ على الصورة:

$$\operatorname{Re}\left(-ie^{-i\theta}z\right) = y\cos\theta - x\sin\theta = b\cos\theta, \qquad |\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

التكبير $w = kz$ ، يصور (وذلك بالتعويض) الدوائر $|z - z_0| = r$ إلى الدوائر $|w - kz_0| = kr$ والخطوط $\operatorname{Re}(\alpha z) = c$ ، إلى الخطوط $\operatorname{Re}(\alpha w) = ck$ حيث $|\alpha| = 1$ ، c حقيقي.

وتحت تأثير تحويل الانعكاس، تحقق الدائرة $|z - z_0| = r\ (> 0)$ التالي:

$$0 = |z - z_0|^2 - r^2 = |z|^2 + |z_0|^2 - 2\operatorname{Re} \bar{z} z_0 - r^2$$
$$= \frac{1}{|w|^2} + \left(|z_0|^2 - r^2\right) - \frac{2}{|w|^2} \operatorname{Re} z_0 w \qquad (1)$$

وإذا كانت $|z_0| = r$ ، تدل على الدائرة المارة بنقطة الأصل، فإننا نحصل على المعادلة:

$$0 = \frac{1 - 2\operatorname{Re} z_0 w}{|w|^2} \qquad (2)$$

التي تعطي الخط $\operatorname{Re}(z_0 w) = \frac{1}{2}$ المار إلى ∞. إذا كانت $|z_0| \neq r$ ، فإن نقطة الأصل لا تقع على الدائرة، وعليه بضرب المعادلة (1) في القيمة غير الصفرية $|w|^2 / (|z_0|^2 \;\; r^2)$ ، نحصل على:

$$0 = \frac{1}{|z_0|^2 - r^2} + |w|^2 - \frac{2}{|z_0|^2 - r^2} \operatorname{Re} z_0 w$$

$$= \left| w - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2} \right|^2 - \frac{r^2}{\left(|z_0|^2 - r^2\right)^2},$$

وهي دائرة. وهذه الخطوط تصور إلى دائرة مارة بنقطة الأصل ونتبع عكس الخطوات لنصل إلى المعادلة (2).

وبما أن أي تحويل كسري خطي هو تحصيل لهذه التحويلات الخاصة، فإننا نكون قد برهنا النظرية التالية.

نظرية

تصور التحويلات الكسرية الخطية الدوائر إلى دوائر في $\boldsymbol{m}$.

مثال (٥,٢,٣)

صوّر تقاطع القرصين $|z-1|<1$ و $|z-i|<1$ تصويرا حافظا للزوايا فوق الربع الأول.

الحل

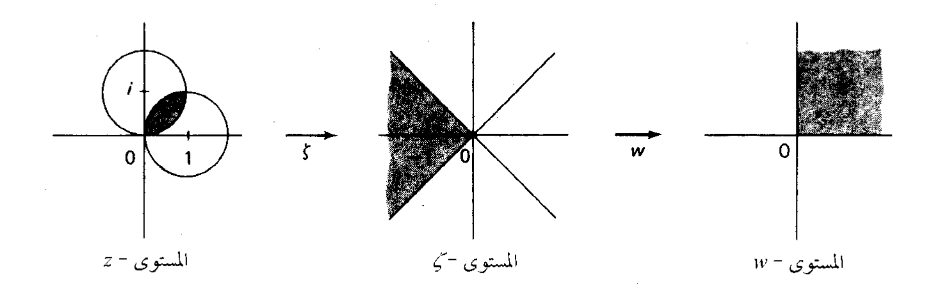
بما أن الدائرتين $|z-1|=1$ و $|z-i|=1$ تتقاطعان عند النقطتين 0 و $1+i$ ، فإننا نوظّف الدالة :

$$\zeta = \frac{z}{z-(1+i)}$$

التي تنقل 0 إلى 0 و $1+i$ إلى ∞ ، وتصوّر الدوائر إلى خطوط مستقيمة عمودية (كل منها) على الآخر عند نقطة الأصل، لأن الدالة حافظة للزوايا، وخطوط التماس للدائرتين متعامدة عند $z=0$. وبما أن $\zeta(2)=1+i$ و $\zeta((1+i)/2)=-1$ ، فإن الخطين لهما ميلان متساويان 1 في المستوى -ζ ويناظر التقاطع المجموعة $|\arg \zeta - \pi| < \pi/4$ (انظر الشكل رقم (٥,٦). والدوران :

$$w = e^{-3\pi i/4}\zeta = \frac{e^{-3\pi i/4} z}{z-(1+i)}$$

يعطي الدالة المطلوبة.



الشكل رقم (٥,٦).

مثال (٤, ٢, ٥)

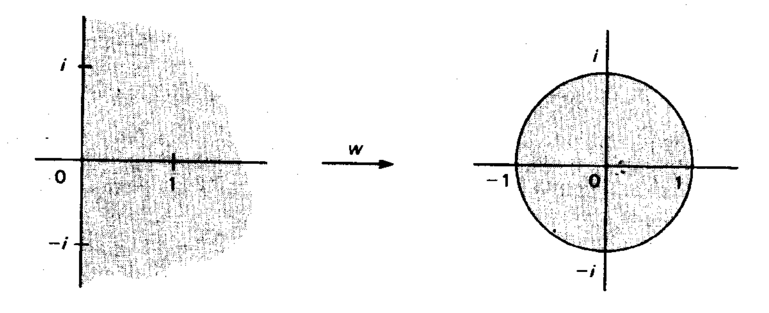
صور نصف المستوى الأيمن إلى قرص الوحدة $|z| < 1$ ليصور العدد 1 إلى نقطة الأصل.

الحل

لاحظ أن الدالة الموجودة بمثال (٥,٢,١):

$$w = \frac{z-1}{z+1} \qquad (3)$$

تنقل 1 إلى 0، 0 إلى -1 و ∞ إلى 1-. أكثر من ذلك، تصور i إلى نفسيها (تسمى مثل هذه النقاط نقاطا ثابتة (fixed points) للدالة (3)). ولأن الدائرة تتعين بثلاث نقاط، فإن المحور التخيلي يصور إلى دائرة الوحدة (انظر الشكل رقم (٥,٧)).



الشكل رقم (٥,٧).

مثال (٥,٢,٥)

أوجد عدد الجذور للمعادلة:

$$p(z) = 11z^4 - 10z^3 - 4z^2 + 10z + 9 = 0$$

الواقعة في نصف المستوى الأيمن.

الحل

بما أن التحويل (3) يصور نصف المستوى الأيمن إلى قرص الوحدة، فإنه بالتعويض بالدالة العكسية:

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

نحصل على المسألة المكافئة لإيجاد عدد الجذور للمعادلة:

$$g(w) = w^4 + 3w^3 + 8w^2 - 2w + 1 = 0$$

الواقعة في $|w| < 1$، ولتكن $f(w) = 8w^2$، إذن

$$|g(w) - f(w)| \le 7 < 8\,|w|^2 = |f(w)|$$

على $|w| = 1$، وتؤدي نظرية "روش" إلى أن $p(z)$ لها جذران في نصف المستوى الأيمن.

تمارين (٢,٥)

في التمارين من (١) إلى (٤)، صف صورة المنطقة المشار إليها تحت تأثير الدالة المعطاة:

(١) القرص $|z| < 1$ ، $w = i\,(z-1)/(z+1)$

(٢) الربع $x > 0$ و $y > 0$ ، $w = (z-i)/(z+i)$

(٣) القطاع الزاوي $|\arg z| < \pi/4$ ، $w = z/(z-1)$

(٤) الشريحة $0 < x < 1$، $w = z/(z-1)$

(٥) أوجد عدد الجذور للمعادلة:

$$11z^4 - 20z^3 + 6z^2 + 20z - 1 = 0$$

الواقعة في نصف المستوى الأيمن.

(٦) كم عدد جذور المعادلة:

$$17z^4 + 26z^3 + 56z^2 + 38z + 7 = 0$$

الواقعة في الربع الأول؟

(٧) باستخدام الدالة الأسية صور المنطقة الواقعة داخل $|z| = 2$ وخارج $|z - 1| = 1$ فوق نصف المستوى العلوي.

(٨) صور المنطقة $|z - 1| < 1$ و $\operatorname{Im} z < 0$ فوق نصف المستوى العلوي.

(٩) صور القطاع $|\arg z| < \pi/4$ فوق المجموعة $|\operatorname{Re} w| < 1$ و$\operatorname{Im} w > 0$.

(**إرشاد للحل**: استخدم دالة الجيب).

(٥,٣) مبدأ التماثل

The Symmetry Principle

إذا أعطينا ثلاث نقاط z_1 , z_2 , z_3 في ***m*** فإنه يوجد تحويل كسري خطي ينقلها إلى ∞، 1 و0 على الترتيب. وإذا كانت ∞ ليست واحدة من هذه النقاط، فإن التحويل يعطى بالنسبة المتبادلة (cross ratio):

$$w = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)},$$

وتصبح:

$$\frac{z_2 - z_3}{z - z_3}, \qquad \frac{z - z_1}{z - z_3}, \qquad \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

إذا كانت z_1 أو z_2 أو $z_3 = \infty$. إذا كانت w^* تحويلا كسريا خطيا آخر له نفس الخواص، فإن دالة التحصيل $w^{-1}\ w^*$ تحفظ النقاط ∞، 1 و 0 ثابتة. وعليه يكون لدينا تحويل كسري خطي:

$$\zeta = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad ad\text{-}bc \neq 0,$$

يحقق المعادلات:

$$0 = b/d\,, \quad 1 = (a + b)\,/\,(c + d)\,, \quad \infty = a/c$$

ولكن $b = c = 0$ و $a = d$ تؤدي عند ذلك إلى $w^* \ w^{-1} = 1$ ، دالة الوحدة. إذن $w^* = w$ ، وعليه فإن w هي التحويل الكسري الخطي الوحيد الذي يصور z_1 ، z_2 و z_3 إلى 0 ، 1 و ∞ على التوالي.

وبما أن الدائرة تحدد بثلاث من نقاطها ، فإننا يمكننا الآن وبسهولة حساب تحويل كسري خطي يحمل دائرة معطاة بالمستوى -z فوق دائرة معطاة بالمستوى -w. نختار ثلاث نقاط z_1 ، z_2 و z_3 على الدائرة الأولى وأخرى w_1 ، w_2 و w_3 على الدائرة الثانية. إذن :

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

تصور z_1 ، z_2 و z_3 إلى w_1 ، w_2 و w_3 ، والطرف الأيمن من المعادلة يصور z_1 ، z_2 و z_3 إلى 0 ، 1 و ∞ والعكس للطرف الأيسر يصوره 0 ، 1 و ∞ إلى w_1 ، w_2 و w_3 .

مثال (١, ٣, ٥)

أوجد التحويل الكسري الخطي الذي يصور النقاط 1 ، i و-1 إلى النقاط 2 ، 3 و4 على التوالي.

الحل

بحل المعادلة

$$\frac{(w-2)(3-4)}{(w-4)(3-2)} = \frac{(z-1)(i+1)}{(z+1)(i-1)}$$

في w نحصل على :

$$w = \frac{(2-4i)z + (2+4i)}{(1-i)z + (1+i)}$$

النقطتان w و $\overline{w}$ متماثلتان بالنسبة إلى المحور الحقيقي. ويمكننا أن نعمم هذا المفهوم إلى أي دائرة C في $\boldsymbol{m}$.

تعريف

النقطتان z وz^* متماثلتان بالنسبة إلى الدائرة C ، في المستوى -z الممتد (extended plane) إذا وجد تحويل كسري خطي w يصور C إلى المحور الحقيقي ويحقق $\overline{w(z)} = w(z^*)$.

ربما يظهر ومن النظرة الأولى، إن التماثل بالنسبة إلى C يعتمد على التحويل w ، ولكن إذا كانت w^* تحويلا كسريا يصور أيضا C إلى المحور الحقيقي ، فإن $\zeta = w^* w^{-1}$ يصور المحور الحقيقي إلى نفسه. وعليه يكون له الشكل :

$$\frac{(\zeta - b_1)(b_2 - b_3)}{(\zeta - b_3)(b_2 - b_1)} = \frac{(w - a_1)(a_2 - a_3)}{(w - a_3)(a_2 - a_1)}$$

لقيم a_j و b_j الحقيقية حيث $j = 1 , 2 , 3$ وبالحل بالنسبة إلى ζ نحصل على :

$$\zeta = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta},$$

لقيم α ، β ، γ وδ الحقيقية وعليه :

$$\overline{w^*(z)} = \overline{\zeta(w(z))} = \zeta\left(\overline{w(z)}\right) = \zeta(w(z^*)) = w^*(z^*),$$

والتماثل مستقل عن التحويل المستخدم. وأكثر من ذلك أن "التماثل يحفظ تحت تأثير التحويلات الخطية الكسرية" ، لأنه إذا كانت z و z^* متماثلتين بالنسبة إلى الدائرة C وw^* أي واحدة من هذه التحويلات ، فإن $w^*(z)$ و$w^*(z^*)$ متماثلتان بالنسبة إلى $w^*(C)$ تحت تأثير الدالة ww^{*-1} ، وتسمى هذه الحقيقة "بمبدأ التماثل" "Symmetry principle".

مثال (٥,٣,٢)

أوجد النقطة التي تماثل النقطة i بالنسبة إلى الدائرة $|z + 1| = 1$.

الحل

أولا نحتاج أن نوجد التحويل الكسري الخطي للدائرة $|z+1|=1$ على المحور الحقيقي والاختيار للنقاط 0، $-1+i$ و -2، لتصويرها إلى 0، 1 و ∞ يعطي التحويل :

$$w = \frac{-iz}{z+2}$$

الذي ينقل i إلى $w = (2 - i) / 5$. إذن $\overline{w} = (2+i)/5$ والدالة العكسية :

$$z = \frac{-2w}{w+i}$$

تنقل w إلى $(-1+i)/2$، وهكذا $z^* = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

مثال (٣, ٣, ٥)

أوجد العدد a (>1) بحيث يوجد تحويل خطي كسري يصور نصف المستوى الأيمن محذوفا منه القرص $|z-1| \le a$ إلى الحلقة $1 < |w| < 2$.

الحل

نبدأ بإيجاد نقطتين z_0 و z_0^* متماثلتين بالنسبة إلى كل من المحور التخيلي والدائرة $|z-1| = a$. بدوران المحور التخيلي بزاوية 90° نجد أن :

$$iz_0^* = i\overline{z}_0 = -i\overline{z}_0,$$

لتصبح $z_0^* = -\overline{z}_0$.يعطي التحويل الكسري الخطي الذي يصور $1-a$ ، $1+ia$ و $1+a$ إلى ∞، 1 و0 بواسطة :

$$w = -i\left[\frac{z-(1+a)}{z-(1-a)}\right].$$

إذن :

$$-i\overline{\left[\frac{z_0-(1+a)}{z_0-(1-a)}\right]} = -i\left[\frac{z_0^*-(1+a)}{z_0^*-(1-a)}\right] = -i\left[\frac{-\overline{z}_0-(1+a)}{-\overline{z}_0-(1-a)}\right]$$

لتصبح :

$$i\left[\frac{\bar{z}_0-(1+a)}{\bar{z}_0-(1-a)}\right]=-i\left[\frac{\bar{z}_0+(1+a)}{\bar{z}_0+(1-a)}\right]$$

والتي نحصل منها على $\bar{z}_0^2=1-a^2>0$ ، إذن z_0 حقيقية، ويمكن أن نفرض أن $z_0>0$ ولأن $z_0^*=-z_0$ تؤدي إلى أن $z_0=\sqrt{1-a^2}$. وبمبدأ التماثل، تنقل الدالة $\zeta=\dfrac{z-z_0}{z+z_0}$ النقطة z_0 إلى 0 و $-z_0$ إلى ∞، وتصور المحور التخيلي والدائرة $|z-1|=a$ إلى الدوائر المتمركزة عند نقطة الأصل. بما أن $\zeta(\infty)=1$ و

$$\zeta(1+a)=\frac{(1+a)-z_0}{(1+a)+z_0}\cdot\frac{(1+a)-z_0}{(1+a)-z_0}=\frac{1-z_0}{a}<1,$$

فإن التكبير بالمقدار $a/(1-z_0)=2$ يعطي $a=4/5$ و

$$w=2\zeta=2\left(\frac{z-\frac{3}{5}}{z+\frac{3}{5}}\right)$$

تمارين (٥,٣)

أوجد التحويل الخطي الكسري الذي يصور النقاط $-1,i,1+i$ على التوالي، إلى النقاط المعطاة في التمارين من (١) إلى (٤):

(١) $0\,,1\,,\infty$ (٢) $1\,,\infty\,,0$

(٣) $2\,,3\,,4$ (٤) $0\,,1\,,i$

(٥) هل $w=\bar{z}$ تحويل خطي كسري؟

(٦) بين أن أي أربع نقاط يمكن أن تصور بواسطة تحويل خطي كسري إلى النقاط 1 ، -1 ، k و $-k$ حيث تعتمد k على النقط الأصلية.

أوجد النقاط المتماثلة للنقطة $3+4i$ بالنسبة إلى الدوائر المعطاة في التمارين من (٧) إلى (٩):

(٧) $|z| = 1$ (٨) $|z - 1| = 1$ (٩) $|z - i| = 2$

(١٠) صوّر دائرة الوحدة إلى نفسها بشرط أن تنقل النقطة α إلى 0 و $\frac{\alpha}{|\alpha|}$ إلى 1 و$|\alpha|<1$.

(**إرشاد للحل**: صوّر α^* إلى ∞).

(١١) أوجد التحويل الكسري الخطي الذي يحمل $|z| = 1$ إلى $|z - 1| = 3$، النقطة -1 إلى 0 و0 إلى $2i$.

(١٢) أوجد تحويلا كسريا خطيا يحمل $|z| = 1$ و$|z - 1| = 3$ إلى الدوائر متحدة المركز. ما النسبة بين الأقطار؟

(١٣) حل تمرين (١٢) للدائرة $|z| = 1$ و$\text{Im } z = 2$.

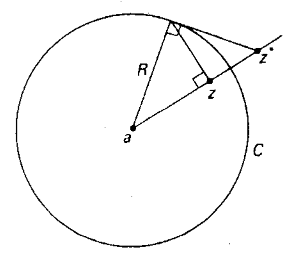
(١٤) برهن على أن كل دالة حافظة للزوايا للقرص فوق الآخر تعطى بوساطة تحويل كسري خطي. لماذا يؤدي ذلك إلى وحدانية الدالة في نظرية التصوير لريمان Riemann mapping th.؟

(**إرشاد للحل**: استخدم تمهيد شفارتز، التمرين (٣)، البند (٢,٤)).

(١٥) افترض أن z^* تماثل z بالنسبة للدائرة $|z - a| = R$ برهن على أن:

$$(z^* - a)(\bar{z} - \bar{a}) = R^2$$

(١٦) استخدم نتيجة التمرين (١٥) لتحقيق أن التركيب الموضح بالشكل (٥,٨) يمكن أن يستخدم لمعرفة النقاط المتماثلة بالنسبة للدائرة.



الشكل رقم (٥, ٨). التركيب الهندسي لنقاط التماثل بالنسبة للدائرة $|z - a| = R$.

(٥, ٤) تحصيل الدوال الأولية الحافظة للزوايا

Composition of Elementary Conformal Mappings

برهنا في البند (٥,١) علـى أن الـدوال البسـيطة e^z ، $\cos\ z$ ، $\sin\ z$ ، $\log\ z$ و z^α هي دوال حافظة للزوايا في مناطق تعريفها حيث مشـتقاتها الأولى لا تنعـدم. وسـنوضح في هذا البند كيف يمكن استخدام تحصيل هذه الـدوال مـع التحويـلات الكسـرية الخطيـة لتصوير منـاطق معينـة فـوق بعضـها تصويـرا حافظـا للزوايـا ، وتشـابه الطريقـة الـتي سنسـتخدمها لتحليـل الدالـة تلـك المسـتخدمة في المثـالين (٥,٢,٢) و(٥,٢,٣) بـالبند (٥,٢).

مثال (٥,٤,١)

أوجد دالة حافظة للزوايا تنقل الشريحة اللانهائية $|\text{Im}\ z| < \pi/2$ إلى قرص الوحدة.

الحل

إذا طبقنا الدالة حافظة الزوايا $\zeta = e^z$ علـى الشـريحة اللانهائيـة $|\text{Im}\ z| < \pi/2$ ، نحصل على نصف المستوى الأيمن $\text{Re}\ \zeta > 0$ لأن :

$$e^0 = 1 \quad \text{و} \quad e^{x \pm i\pi/2} = \pm e^x i$$

ويؤدي مبدأ التماثل إلى أن الدالة :

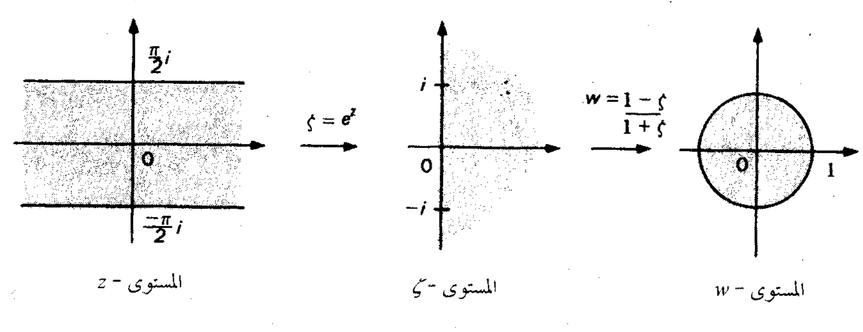
$$w = \frac{1-\zeta}{1+\zeta},$$

التي تنقـل 1- ، 0 و1 إلى ∞ ، 1 و 0 يجـب أن تصـور المحـور التخيلـي إلى دائـرة الوحـدة .

إذن فإن التحصيل $w = w(\zeta(z))$ حيث :

$$w = \frac{1-\zeta}{1+\zeta} = \frac{1-e^z}{1+e^z} = -\tanh\left(\frac{z}{2}\right)$$

يصور الشريحة $|\text{Im}\ z| < \pi/2$ إلى قرص الوحدة (انظر الشكل رقم (٥,٩)).



الشكل رقم (٥,٩).

مثال (٥,٤,٢)

صوّر نصف الشريط اللانهائي $J = \{z: |\text{Re } z| < \pi/2, \text{Im } z > 0\}$ تصويرا حافظا للزوايا إلى الربع الأول.

الحل

الدالة $\zeta = \sin z$ تصور J إلى نصف المستوى العلوي لأن (بالنظر للبند (٨, ١)):

$$\sin\left(\pm\frac{\pi}{2} + iy\right) = \sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\cosh y \; = \pm\cosh \; y,$$

تؤدي إلى أن $|\sin\;(\pm\,\pi/2 + iy)| = \cosh y \geq 1$ بينما $|\sin x| \leq 1$ لكل $|x| \leq \pi/2$.
ولكن الدالة $w = \sqrt{\zeta}$ تصور نصف المستوى العلوي إلى الربع الأول، لأن الجذر التربيعي ينصف الزاوية، وعليه فإن $w = \sqrt{\sin z}$ هي الدالة المرجوّة .

مثال (٥,٤,٣)

صوّر نصف المستوى الأيمن محذوفا منه الخط $\{z \;:\; x \geq 1,\; y = 0\}$ إلى نصف المستوى العلوي.

الحل

أولا : طبق الدالة $\zeta = z^2$ للحصول على المستوى ناقصا منه الشعاعان المبينان في المستوى -ζ في الشكل (٥,١٠).

$\zeta = z^2$ $Z = \frac{\zeta - 1}{\zeta}$ $w = \sqrt{Z}$

المستوى - z المستوى - ζ المستوى - Z المستوى - w

الشكل رقم (٥,١٠). الدالة $w = \sqrt{\frac{z^2 - 1}{z^2}}$

استخدم حينئذ التحويل الكسري الخطي $Z = (\zeta - 1)/\zeta$ الـذي ينقـل 0، ∞ و 1 إلى ∞، 1 و0 لتصوير المستويين ذوي الفتحتين إلى المستوى ذي الفتحة (الطولية) الواحدة وأخيرا فإن $w = \sqrt{Z}$ ينتج نصف المستوى العلوي، ولذا تكون الدالة المطلوبة هي :

$$w = \sqrt{\frac{\zeta - 1}{\zeta}} = \sqrt{\frac{z^2 - 1}{z^2}}$$

تمارين (٥,٤)

(١) أوجد دالة حافظة للزوايا تنقل قرص الوحدة إلى الشريحة اللانهائية $|\text{Re } z| < 1$.

(**إرشاد للحل**: اعتبر الدالة العكسية في مثال (٥,٤,١)).

(٢) بين أن :

$$w = \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}}$$

تصور تصويرا حافظا للزوايا نصف المستوى العلوي محذوفا منه الخط $(z: x = 0, y \geq 1)$، إلى نصف المستوى العلوي.

(٣) أوجد الدالة التي تحمل نصف المستوى العلوي إلى متمم القطعة المستقيمة من -1 إلى 1.

(٤) أوجد الدالة الحافظة للزوايا للمربع $(z: |x| \le 1 , |y| \le 1)$ إلى الحلقة $1 < |w| < e^{2\pi}$ محذوفا منها المحور الحقيقي السالب.

(٥) ما صورة القرص $|z - a| < a$ تحت تأثير الدالة $w = z^2$؟

(٦) بيّن أن التحويل:

$$\left(\frac{w-1}{w+1}\right)^2 = i\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

يصور النصف العلوي لقرص الوحدة إلى قرص الوحدة تصويرا حافظا للزوايا.

(٧) صف صورة القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1/2$ تحت تأثير الدالة $w = \sqrt{1-z^2}$.

(٨) صوّر مكمل القطعة المستقيمة $(z: y = 0 , |x| \le 1)$ فوق قرص الوحدة.

(٩) صوّر خارج القطع المكافئ $y^2 = 4x$ فوق قرص الوحدة بشرط أن ترسل 0 و1- إلى 1 و0.

(١٠) صوّر المنطقة الشمالية للفرع الأيمن من القطع الزائد $\text{Re}\ (z^2) = 1$ فوق قرص الوحدة.

(**إرشاد للحل**: اعتبر الدالة $w = z + 1/2$).

(١١) *برهن على أن الدالة:

$$w = \frac{Az^2 + Bz + C}{az^2 + bz + c}$$

يمكن أن تتكون من التحويلات الثلاثة المتتالية:

$$\zeta = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad Z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \quad w = \mu Z + \nu$$

أو من التحويلتين المتتاليتين:

$$\zeta = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{و} \quad w = \zeta^2 + \nu$$

(٥, ٥) انسياب الموائع

Fluid Flow

سوف نناقش في هذا البند مشكلة فيزيائية يمكن أن تحلل بمساعدة الدوال التحليلية وبما أن الدالة المركّبة يمكن أن تحلل إلى دالتين حقيقيتين، فإن نظرية الدوال التحليلية مهمّة جدا في حل مسائل تحتوي على متغيرين في الفراغ ذي البعدين. ولأن هذا الكتاب لم يعالج وفقا للفيزياء الرياضية، فإن كثيرا مما يلي هو عرض للنظرية الفيزيائية.

يتطلب الوصف الكامل لحركة الموائع المعلومات عن متجه السرعة عند كل نقطة من المائع، وعند أي زمن معطى. افترض أن المائع غير مضغوط (أي له كثافة ثابتة) وأن الانسياب ثابت (steady) (مستقل عن الزمن) وذو بعدين (ونفس الشيء في كل المستويات الموازية للمستوى -xy في الأبعاد الثلاثة).

تحدث شروط من هذا النوع، على سبيل المثال، عندما ينساب المائع على جسم أسطواني محوره متعامد على اتجاه الانسياب، "ومتّجه السرعة" يمكن أن يُعطى على أنه دالة متصلة ذات قيم مركّبة للمتغيّر المركب $V = V(z)$ لكل z في المنطقة G. ونفترض أيضا في هذا البند، أنه لا توجد منابع (Sources) أو مصاب (Sinks) (النقط التي عندها يولد أو ينعدم الفيض) تقع في المنطقة G.

تؤدي الفروض بأن المائع غير مضغوط، وأنه لا توجد منابع أو مصاب في G، إلى أن المنطقة البسيطة الاتصال في G تحتوي دائما على نفس الكمية من المائع. وعليه فإن كمية المائع لكل وحدة زمن المارة بطول ds على منحنى جوردان الأملس قطعيا، الواقع وما بداخله في G، يساوي $V_n\, ds$، حيث V_n هو (عدد حقيقي) مركبة للدالة V في الاتجاه العمودي الخارج من المنحنى (انظر الشكل رقم (٥,١١). إذن كمية التدفق (flow) الخارجة هي:

$$Q = \int_{\gamma} V_n ds = 0 \qquad (1)$$

والتكامل الخطي للمركّبات المماسية V_s للسرعة V حول المنحنى γ هو :

$$\Gamma = \int_{\gamma} V_n ds \tag{2}$$

ويسمى دوران (circulation) V حول γ. وإذا كان الدوران لا يساوي صفرا على منحنى ما γ، فإن المركّبات المماسية التي لها إشارة ما، تغلب المركبات الأخرى التي لها إشارة مخالفة في التكامل (2). يعني هذا على وجه التقريب أن المائع يدور حول γ . ويسمى الانسياب غير دوراني (irrotational) إذا كان الدوران يساوي صفرا حول كل المنحنيات المغلقة في G. نفترض أن الانسياب غير دوراني حيث إن $\Gamma = 0$.

أشير في الشكل رقم (٥,١١) إلى الاتجاهات المماسية والمتعامدة الخارجة عن المنحنى عند النقطة z. لتكن $\alpha = \alpha(z)$ الزاوية بين الاتجاه الأفقي الموجب والعمودي الخارجي للمنحنى γ عند z، افترض أن متجه السرعة V عند z كما أشير إليه.

يعطى دوران نظام الإحداثي n حول النقطة z، زاوية $-\alpha$، المركبتين المماسية والعمودية التاليتين لمتجه السرعة V.

$$V_n = \mathrm{Re}\left(e^{-i\alpha}\ V\right), \qquad V_s = \mathrm{Im}\left(e^{-i\alpha}\ V\right)$$

الشكل رقم (٥, ١١). مركبات متجه السرعة.

وعلى وجه الخصوص ، نحصل على :

$$e^{-i\alpha} V = V_n + iV_s \tag{3}$$

يرتبط عنصر الطول ds (انظر الشكل رقم (٥,١١)) بالعنصرين dx وdy بواسطة المتطابقتين :

$$dx = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)ds, \quad dy = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)ds,$$

وهذا يؤدي إلى أن :

$$dz = dx + idy = e^{i(\pi/2+\alpha)}\, ds = ie^{i\alpha}\, ds \tag{4}$$

الآن ، إذا كان منحنى جوردان الأملس جزئيا γ موجودا وما بداخله داخل G فإننا نحصل بواسطة المعادلات من (1) إلى (4) على :

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{V(z)}dz &= i\int_\gamma \overline{\left(e^{-i\alpha}V\right)}ds \\ &= i\int_\gamma \overline{\left(V_n + iV_s\right)}ds \\ &= \int_\gamma \left(V_s + iV_n\right)ds = 0,\end{aligned}$$

ويؤدي ذلك إلى أن $\overline{V(z)}$ تحليلية وذلك بواسطة نظرية "موريرا". وإذا كانت G بسيطة الترابط ، فإن الدالة الأصلية (antederivative) للدالة $\overline{V(z)}$ تكون تحليلية $w(z) = u(z) + iv(z)$ ، وتسمى "الجهد المركب complex potential" للانسياب ، وتعرّف u على أنها دالة الجهد (potential function)* ، v على أنها دالة للانسياب (stream function). وتتحول الجسيمات المتباعدة للمائع حول المنحنيات التي لها اتجاهات عند كل نقطة متطابقة مع متجه السرعة.

---

* نتجنب استخدام الرمز Φ لدالة الجهد لتأكيد التشابه الأخير بين جريان الفيض وانسياب الحرارة وكذلك لحفظ رمز الدالة.

وتسمى هذه المنحنيات خطوط الانسياب (stream line) وتتميز بالمعادلة : ثابت = $v(z)$ ، لأن المماس لهذا المنحنى له الميل :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v_x}{v_y} = -\frac{v_x}{u_x} = -\tan\arg w' = \tan\arg V$$

بوساطة معادلتي كوشي - ريمان، حيث إن $V = \overline{w}'$.

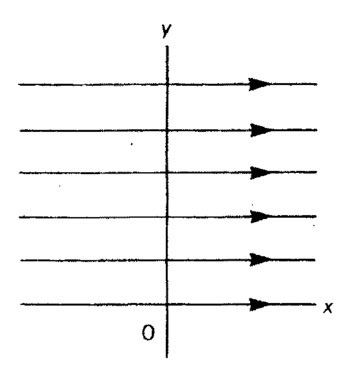
تسمى المنحنيات : ثابت = $u(z)$، خطوط تساوي الجهد (equipotential lines) وهي متعامدة على خطوط الانسياب لأن :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y} = \frac{u_x}{v_x} = \frac{-1}{\tan\arg V}$$

والنقط التي عندها $V(z) = 0$ ، وبالتالي $w'(z) = 0$ ، تعرف على أنها نقط ركود (stagnations points) للانسياب.

مثال (١, ٥, ٥)

نفترض أن لدينا انسيابا منتظما سرعته A (> 0) في الاتجاه الموجب لمحور-x في نصف المستوى العلوي. يقرب حركة هذا الانسياب للمائع في قنوات عريضة للغاية (انظر الشكل رقم (٥,١٢)).



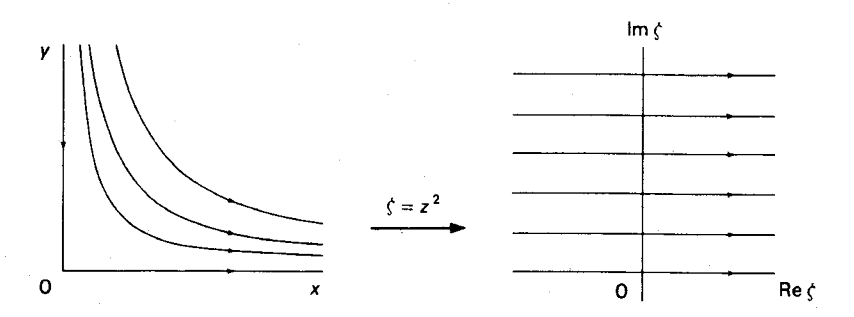
الشكل رقم (٥,١٢).

وبما أن $V(z) = A$ ، فإنه ينتج أن $w'(z) = A$ ، ولذا فإن الجهد المركب هو $w(z) = Az + c$ حيث إن $c = c_1 + I c_2$ ثابت مركب. وهكذا $u(z) = Ax + c_1$ و$v(z) = Ay + c_2$ ، ولذا تكون خطوط تساوي الجهد رأسية وخطوط الانسياب أفقية (مهملين تأثير اللزوجة في الخط الحقيقي). وبوضع $c = 0$ فإن خط الانسياب $v = 0$ ينطبق على المحور الحقيقي.

افرض أن الدالة $\zeta = f(z)$ تصور المنطقة G تصويرا حافظا للزوايا إلى نصف المستوي العلوي $f(G)$. إذا كان الجهد المركب $w(\zeta)$ لانسياب المائع معروفا، فإن الجهد المركب للانسياب في G يعطى بوساطة الدالة التحليلية $w(f(z))$. فعلى سبيل المثال، إذا كان الجهد المركب في $f(G)$ هو المعطى في المثال (٥,٥,١)، فإن خطوط الانسياب في G هي تلك المنحنيات التي تصور بوساطة دالة التحصيل wof إلى الخطوط المستقيمة: $v =$ ثابت في نصف المستوى العلوي. وحساب مثل هذه الدوال المحصلة هو الخطوة الأساسية في الحل لمسائل ديناميكا الموائع.

مثال (٥, ٥, ٢)

إذا كنا مهتمين بإيجاد خطوط الانسياب (stream lines) على امتداد زاوية قائمة في قناة عريضة، فإنه يمكن أن نقرب هذه الحالة بدراسة الانسياب في الربع الأول. تصور الدالة $\zeta = z^2$ الربع الأول فوق نصف المستوى العلوي. فإذا علمنا أن الجهد المركب $w = w(\zeta)$ للانسياب في نصف المستوى العلوي، فإن $w = w(z^2)$ هو الجهد المركب للانسياب في الربع الأول. فعلى سبيل المثال، إذا افترضنا أن الانسياب منتظم، وله سرعة A (> 0) في نصف المستوى العلوي للمستوي -ζ، $(c=0)$، فإن الجهد المركب في مستوى -ζ هو $w=A\zeta$. وهكذا فإن الجهد المركب في الربع الأول يحقق $w = Az^2$ وخطوط الانسياب تعطى بوساطة القطاعات الزائدة: ثابت $= 2Axy$ ومتجه السرعة هو $V(z) = 2A\bar{z}$. ونقطة الأصل هي نقطة ركود (انظر الشكل رقم (٥,١٣)).



الشكل رقم (٥,١٣). خطوط السيل على امتداد ركن.

مثال (٥, ٥, ٣)

للدالة $\zeta = z + a/z$ تطبيقات مهمة في انسياب الموائع في بعدين. وبإعادة كتابة الدالة في الصورة:

$$\frac{(z \pm a)^2}{z} = \zeta \pm 2a$$

نجد أن الصورة ζ لكل نقطة على الدائرة $|z| = b$ حيث $b > a$، تحقق:

$$|\zeta - 2a| + |\zeta + 2a| = \frac{|z-a|^2 + |z+a|^2}{b}$$

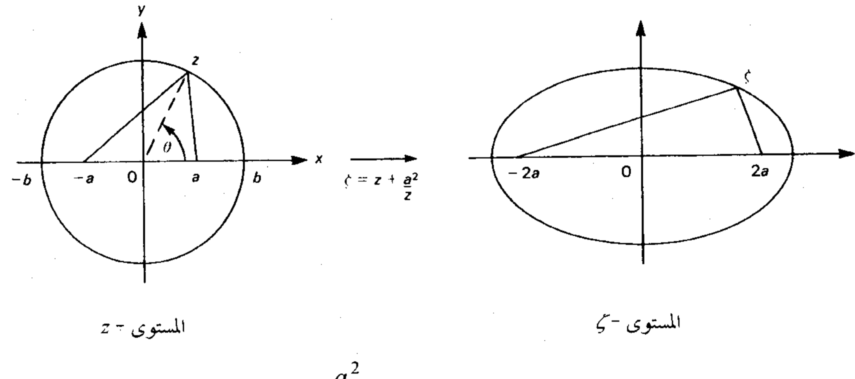
وباستخدام قانون جيب التمام (انظر الشكل رقم ٥,١٤)، نحصل على:

$$|z-a|^2 = a^2 + b^2 \quad 2ab\cos\theta \,,$$

$$|z+a|^2 = a^2 + b^2 \quad 2ab\cos(\pi - \theta)$$

حيث إن $\theta = \arg z$. إذن:

$$|\zeta - 2a| + |\zeta + 2a| = \frac{2(a^2 + b^2)}{b}$$



الشكل رقم (٥,١٤). الدالة $\zeta = z + \dfrac{a^2}{z}$

ولأن الجزء الأيمن يكون ثابتا لكل عدد ثابت b، فإن صورة الدائرة $|z| = b$ هي قطع ناقص له بؤرتان عند $\pm 2a$. وعليه فإن الدوائر المتمركزة عند نقطة الأصل ذوات أنصاف أقطار $b > a$ في المستوي المركب تصور إلى قطاعات ناقصة متحدة البؤرتين (confocal) في المستوي $-\zeta$. وأكثر من ذلك فالدائرة $|z| = a$ تصور فوق القطعة المستقيمة التي تربط $2a$ إلى $2a$ في المستوي $-\zeta$، لأن $z = ae^{i\theta}$ تؤدي إلى:

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z} = ae^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 2a \cos\theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

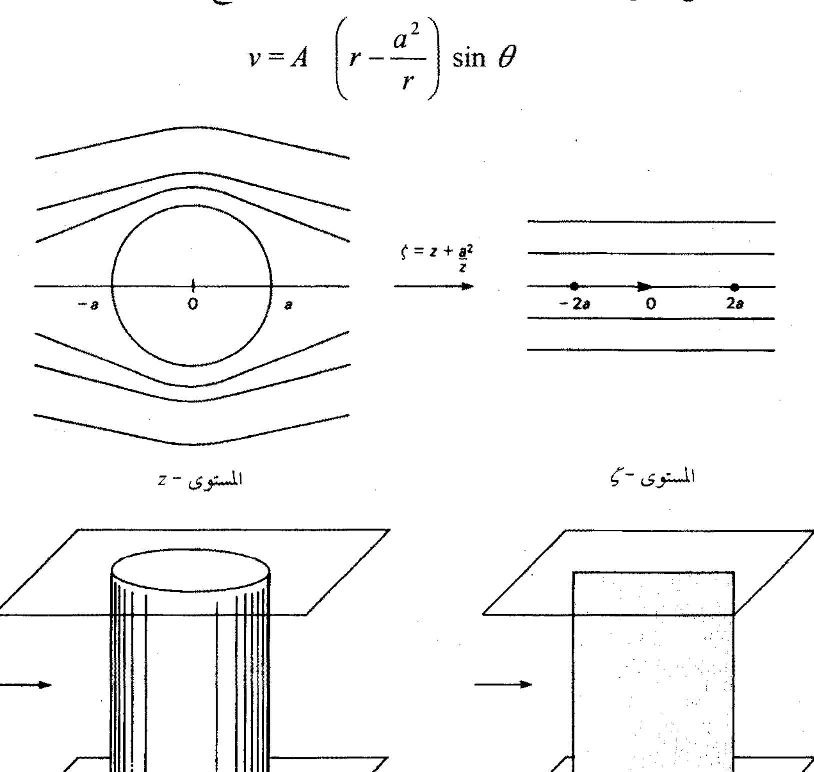
لاحظ أن $(z + a^2/z)' = 1 - (a/z)^2$، وعليه فإن $\zeta = z + a^2/z$ تصور تصويرا حافظاً للزوايا، خارج الدائرة $|z| = a$ إلى خارج القطعة المستقيمة التي تربط $2a$ إلى $2a$. إذن بافتراض أن الحركة لانسياب السوائل في المستوي $-\zeta$ منتظمة وبسرعة A $(0<)$ توازي المحور الحقيقي، فإننا نحصل على الجهد المركب.

$$w = A\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$

للانسياب المار بأسطوانة دائرية نصف قطرها a [انظر الشكل رقم (٥,١٥)].

ونحصل على دالة الانسياب (stream function) بوضع $z = re^{i\theta}$، فنحصل على :

$$v = A \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta$$



الشكل رقم (٥,١٥). انسياب مار على أسطوانة.

ويكون خط الانسياب $V = 0$ مـن الدائرة $|z| = a$ والمحـور الحقيقـي حيـث $|x| \geq a$ وسرعة انسياب المائع هي :

$$V = \overline{w}' = A \left[1 - \left(\frac{a}{z} \right)^2 \right],$$

ذات نقط ركود عند $z = \pm a$. لاحظ أن $V \to A$ عندما $|z| \to \infty$ ، ويـؤدي ذلـك ، وبالرغم من أن الانسياب قد اضطرب بوجود الأسطوانة ، إلى إهمـال هـذا الاضطـراب

عند المسافات البعيدة من الأسطوانة، وأن الانسياب لقيم $|z|$ الكبيرة منتظم بالضرورة، وله السرعة A موازيا لمحور السينات.

تمارين (٥, ٥)

أوجد خطوط الانسياب لمائع غير مضغوط ينساب بدون منبع أو مصرف في كل من المناطق المعطاة في التمارين من (١) إلى (٤). افترض أن المائع له السرعة $A > 0$ عندما $z \to \infty$، هل توجد نقط ركود؟

(١) $0 < \arg z <$ (٢) $0 \;\; < \arg z <$

(٣) $0 < \arg z <$ (٤) $< \arg z <$

احسب في التمارين من (٥) إلى (٨) مقدار السرعة (speed) $|V|$ عند $z = 0, 1, \; i$ للمائع الموجود بنصف المستوي العلوي المعطى بوساطة الجهود المركبة (complexes potentials). هل توجد أي نقط ركود؟

(٥) $w = z + z^3$ (٧) $w = z + 2iz^2$

(٦) $w = 3z \quad iz^2$ (٨) $w = \sin z$

(٩) أوجد المعادلات لخطوط الانسياب للجهود المركبة المعطاة في التمارين من (٥) إلى (٨).

(١٠) أوجد المعادلات لخطوط تساوي الجهد للجهود المركبة في التمارين من (٥) إلى (٨).

(١١) افترض أن الجهد المركب للانسياب في المستوى z يعطى بالمعادلة:

$w = \cosh^{-1}(z/a)$ صف خطوط الانسياب لهذا الجريان.

(**إرشاد للحل**: اعتبر $z = a \cosh w$).

(١٢) استخدم التمرين (١١) لوصف الانسياب خلال فتحة محدودة بوساطة القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$.

(١٣) استخدم التمرين (١١) لوصف الانسياب خلال فتحة لها العرض $2a$ في رقيقة مستوية. هل هذا الانسياب مقبول فيزيائيا؟

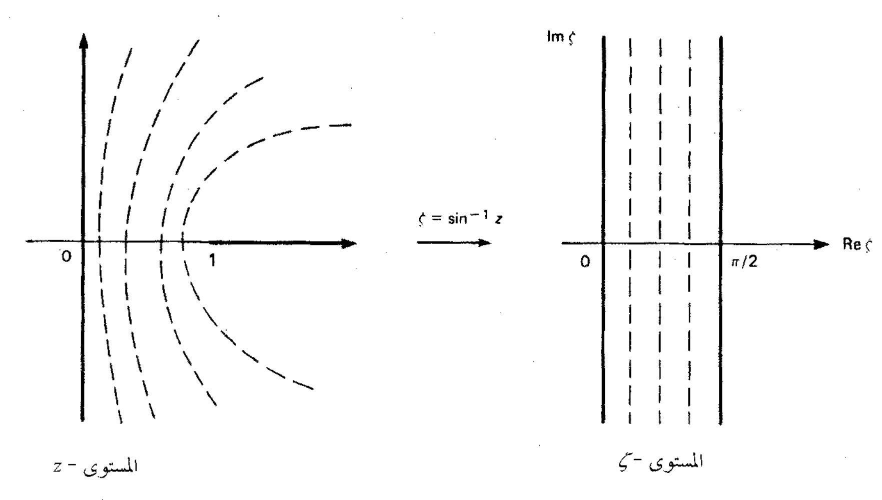
(**إرشاد للحل**: أوجد مقدار السرعة عند الحواف).

(١٤) استخدم الدالة $\zeta = \sin^{-1} z$ لحساب خطوط الانسياب لمائع غير مضغوط ينساب في المنطقة المبينة بالشكل رقم (٥,١٦). افترض أن الانسياب في المستوي منتظم ومواز إلى المحور التخيلي. هل هذا الانسياب مقبول فيزيائيا؟

(١٥) تذكر نظرية بيرنولي (Bernoulli`s theorem) في الحركة الثابتة لمائع غير مضغوط، إن المقدار:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\,|V|^2$$

له قيمة ثابتة عند كل نقطة لأي خط انسياب للجريان، حيث p ، ρ و $|V|$ هي الضغط، الكثافة، ومقدار السرعة على التوالي. بيّن أنه في المثال (٥,٥,٣) إذا كانت $A^2 > \frac{2}{3} P(\infty)/\rho$، فإنه يوجد نقاط يكون الضغط عندها سالبا. وعند هذه النقاط سوف يتكون الفراغ مسببا ظاهرة التكهف (cavitation). ويحدث التكهف، على سبيل المثال بالقرب من الحواف لمحرك يتحرك بسرعة.



الشكل رقم (٥,١٦). انسياب رأسي منتظم في المستوي -ζ .

(٥, ٦) صيغة شيفارتز ـــ كريستوفيل

Schwartz – Christoffel Formula

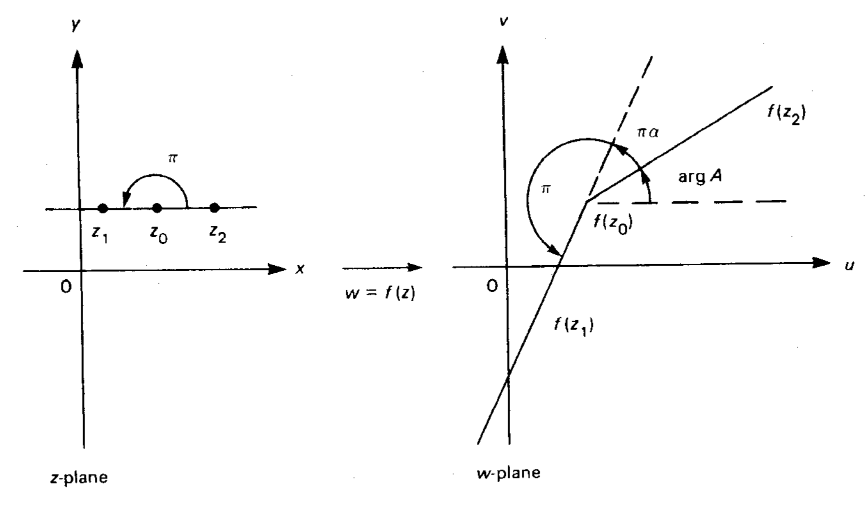
برهنا في النظرية الثانية بـالبند (٥,١) علـى أنـه إذا كـانت $f(z)$ تحليليـة في منطقـة تحتوي على النقطة z_0 التي عندها $f'(z)$ لها جذر من الرتبة k، فإن كل الزوايـا عنـد z_0 تكبر بالعامل $k+1$. اعتبر كبديل دالة تحليلية لها المشتقة:

$$f'(z) = A(z - z_0)^{\alpha},$$

حيث $-1 < \alpha < 1$ و $\alpha \neq 0$. النقطـة z نقطة تفرع (branch point) للدالة f'، وبـدون فقدان التعميم، افترض أن القطـع للفـرع (branch cut) يكـون رأسيا إلى أسـفل مـن z_0 وأن z نقطة على الخط المار بـ z_0 موازٍ للمحور الحقيقي. بما أن:

$$\arg f'(z) = \arg A + \alpha \arg(z - z_0)$$

فإن التغير في الاتجاه سيكون $\arg A$ إذا كانت z إلى اليمـين مـن z_0، ويكـون $(\arg A + \pi\alpha)$ إذا كانت z إلى اليسار من z_0 [انظر الشكل رقم (٥,١٧)]. وعليه فـإن الزاويـة π عنـد z_0 تكبر بالعامل $\alpha + 1$ عند $f(z_0)$.



الشكل رقم (٥,١٧). تأثير $f'(z) = A(z - z_0)^{\alpha}$.

ويمكننا أن نستخدم هذه الملحوظة لتكوين دالة $f\ (z)$ تصور الجزء الحقيقي على مسار المضلع (polygonal path)، ولتكن $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ تقسيما بأعدادٍ حقيقية، ولنفترض أن الدالة $f\ (z)$ لها المشتقة:

$$f'(z) = A(z - x_1)^{\alpha_1}(z - x_2)^{\alpha_2}\dots(z - x_n)^{\alpha_n}$$

حيث $A \neq 0$ عدد مركب ثابت، $-1 < \alpha_k < 1$ لكل $k = 1, 2, \dots, n$. وبما أن $\arg f'(z) = \arg A + \alpha_1 \arg(z - x_1) + \alpha_2 \arg(z - x_2) + \dots + \alpha_n \arg(z - x_n)$،

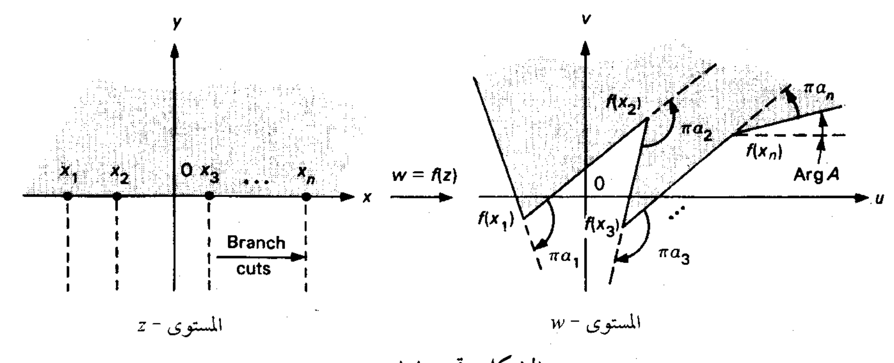
فإن صور الفترات $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, \infty)$ هي قطع مستقيمة زواياها تقاس مع المحور الأفقي كما يلي:

الفترة	الزاوية
(x_n, ∞)	$\arg A$
(x_{n-1}, x_n)	$\arg A + \pi\alpha_n$
$\vdots$	$\vdots$
(x_1, x_2)	$\arg A + \pi(\alpha_2 + \dots + \alpha_n)$
$(-\infty, x_1)$	$\arg A + \pi(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$

هكذا تصور الدالة $w = f(z)$ المحور الحقيقي فوق مسار المضلع كما هو مبين في الشكل (٥,١٨). ونجد من التركيب أن $f(z)$ تحليلية على المستوى المركب دون قواطع الفرع (branch cuts) السفلية من كل النقط $x_1, x_2, \dots, x_n$. هكذا، إذا كانت z أي نقطة في نصف المستوى العلوي، أمكننا أن نعرف الدالة حافظة الزوايا $f(z)$ بوساطة:

$$f(z) = \int_{\gamma} f'(\zeta)d\zeta$$

حيث γ هي القطعة المستقيمة من x_0 ($x_0 \neq x_k$ حيث $k = 1, 2, \dots, n$) إلى z. وأي دالة $f(z)$ لها هذه الصورة تعرف على أنها "تحويل شفارتز كريستوفيل". وتعطي هذه المناقشة عكس النظرية التالية التي برهناها خارج نطاق هذا الكتاب.



الشكل رقم (٥,١٨).

نظرية شفارتز ـــ كريستوفل Schwartz – Christoffel theorem

كل الدوال التي تصور نصف المستوى العلوي تصويرا حافظا للزوايا إلى مضلع (polygon) في m ذي الزوايا الخارجية α_n حيث n , ... , $k = 1$ لها الصورة:

$$f(z) = A + B\int_0^z (x-x_1)^{\alpha_1}\ (x-x_2)^{\alpha_2} \ldots (x-x_n)^{\alpha_n}\, dz,$$

حيث النقاط $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ حقيقية. B و A ثابتان مركبان.

تسمى الدالة المعطاة بوساطة المعادلة التكاملية في هذه النظرية "صيغة شفارتز-كريستوفيل" للمضلع المعطى.

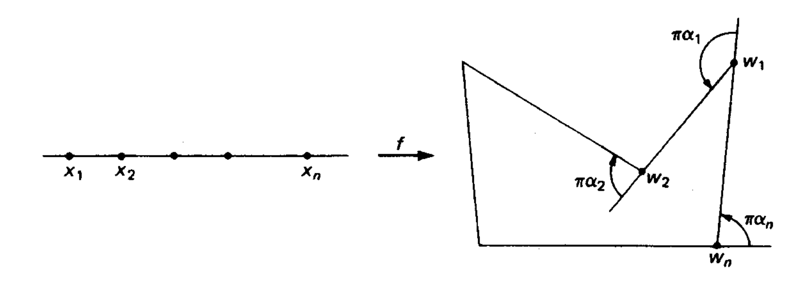
"الزاوية الخارجية" عند الرأس $w_k = f(z)$ للمضلع هي $\pi\alpha_k$ وهي المطلوبة التي تجعل اتجاه المتجه من w_k إلى w_{k+1} ينطبق مع اتجاه المتجه من w_{k-1} إلى w_k. وبالنظر إلى الشكل (٥,١٩)، نرى أن الزاوية الخارجية قد قيست بالدوران من الضلع التالي للمضلع إلى الخط المستقيم امتداد الضلع السابق للمضلع. لاحظ عموما أن $1<\alpha_k<1$ ، حيث $\alpha_k > 0$ عندما يكون الدوران عكس عقارب الساعة و $\alpha_k < 0$ عندما يكون الدوران باتجاه عقارب الساعة. أكثر من ذلك، إذا ما صنعنا دائرة باتجاه عقارب الساعة حول محيط المضلع فسوف نلف دورة كاملة حاصلين على:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = -2 \quad \text{أو} \quad \pi\sum_{k=1}^{n} a_k = -2\pi$$

ويكون التحكم بالثابتين B وA بوساطة الانسحاب، والتكبير، ودوران الموضع، والمقياس (scale) واتجاه المضلع في المستوي - w، والنقاط x_k التي تصور إلى الرؤوس w_k للمضلع. يسمح لنا التحويل الكسري الخطي لنصف المستوى العلوي إلى نفسه بتصوير ثلاث من النقاط x_k إلى ثلاث نقاط محددة على المحور الحقيقي. إذن نحن في حرية لاختيار المواضع الثلاث من النقاط x_k. معتمدين على المضلع، ويفيدنا الاختيار المناسب لمواضع هذه النقاط في الحصول على صورة كاملة لحل التكامل. ومواضع النقاط المتبقية x_k يعتمد على شكل المضلع، ومن الصعوبة بمكان تكوينه إلا في الحالات التي عندها يكون كثير الأضلاع منتظما.

في العادة، يفضل اختيار النقطة $x_n = \infty$، فهذا الاختيار يحذف الحدود المحتوية على x_n في صيغة شفارتز-كريستوفيل.

تبين الأمثلة التالية استخدام صيغة شفارتز-كريستوفيل:



الشكل رقم (٥,١٩). الزاوية الخارجية للمضلع.

مثال (٥, ٦, ١)

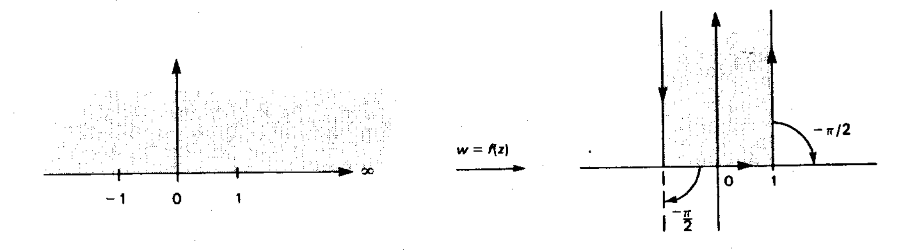
صور نصف المستوى العلوي تصويرا حافظا للزوايا إلى الشريحة $|x| < 1$ و $y > 0$.

الحل

اختر 1-، 1 و∞ لتكون النقاط التي تصوّر إلى الرؤوس 1-، 1، ∞ للشريحة المرسومة في *m* (انظر الشكل رقم (٥,٢٠). بوساطة صيغة شفارتز-كريستوفيل نحصل على :

$$w = A + B\int_o^z (z+1)^{-1/2}\ (z\ \ 1)^{-1/2}\,dz = A + B\int_o^z \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$$

$$=A + \frac{B}{i}\int_o^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\ \ A + \frac{B}{i}\sin^{-1} z\,.$$



الشكل رقم (٥,٢٠).

وبما أن $w(\pm 1) = \pm 1$ ، فإننا نحصل على :

$$A - \frac{iB\pi}{2} = 1\,,$$

$$A + \frac{iB\pi}{2} = -1$$

إذن $A = 0$ و $B = 2i/\pi$ ، وهكذا تصبح $w = (2/\pi)\sin^{-1} z$.

مثال (٥,٦,٢)

صور نصف المستوى العلوي إلى المنطقة المظللة الموضحة بالمستوى $-w$ في الشكل(٥,٢١).

الحل

من السهل أن نحصل على هذا التحويل بدون استخدام صيغة شفارتز-كريستوفيل، يؤدي تحصيل التحويلات المدون بالشكل (٥,٢١) إلى أن:

$$w=\sqrt{W} \quad =\sqrt{Z-1} \quad = \sqrt{z^2-1}\ .$$

$Z=z^2$ ، $W=Z-1$ ، $w=\sqrt{W}$

المستوى - z ، المستوى - Z ، المستوى - W ، المستوى - w

الشكل رقم (٥,٢١). $w=\sqrt{z^2-1}$.

وللتأكد من أن نفس التحويل حصل عليه بصيغة شفارتز-كريستوفيل، لاحظ أن لدينا زوايا خارجية $\pi/2$ ، π و$-\pi/2$ عند 1 ، 0 و-1. حينئذٍ تكون:

$$w=A+B\int_0^z \frac{zdz}{\sqrt{z^2-1}}$$

$$=A+B\sqrt{z^2-1}\,\Big|_o^z \quad =(A-Bi)+B\sqrt{z^2-1}\quad .$$

الآن $0=w(1)=A-Bi$ و$i=w(0)=A$ ، لذا $B=1$ و $w=\sqrt{z^2-1}$

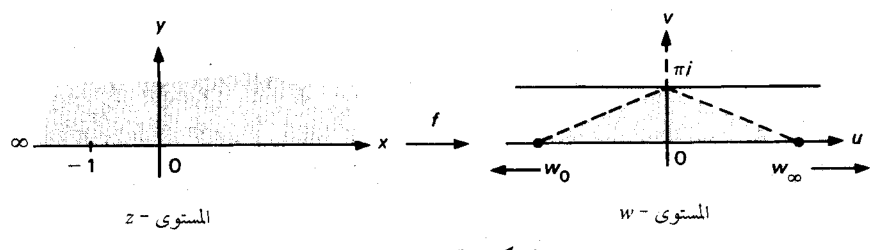
مثال (٥,٦,٣)

صور نصف المستوى العلوي إلى الشريحة اللانهائية $0<v<\pi$.

الحـــل

اعتبر المثلث المظلل بالشكل (٥,٢٢). افترض أن النقاط ∞ ، -1 و0 من المستوى- z صورت إلى:

النقاط w_∞ ، πi وw_0 المستوى -w. إذا جعلنا w_0 تقترب من ∞ خلال القيم الحقيقية السالبة، بينما w_∞ تقترب من ∞ خلال القيم الحقيقية الموجبة، فإننا نحصل في النهاية على الشريحة اللانهائية $0 < v < \pi$.



الشكل رقم (٥,٢٢).

تؤول الزوايا الخارجية عند w_0 ، πi وw_∞ إلى π ، 0 و-π فتصبح صيغة شفارتز-كريستوفيل في الحالة النهائية هي :

$$w = A + B \int_1^z \frac{dz}{z} = A + B \log z$$

نختار $z = 1$ كنهاية دنيا للتكامل، لأن $\log 0 = \infty$. الآن :

$$\pi i = w(-1) = A + B \log(-1) = A + B\pi i ,$$

وهكذا بوضع $A = 0$ و$B = 1$ فنحصل على التحويل المنشود $w = \log z$.

مثال (٥,٦,٤)

صور نصف المستوى إلى داخل المثلث ذي الزوايا الخارجية -$\pi\alpha$ ، -$\pi\beta$ و-$\pi\gamma$ حيث $\alpha + \beta + \gamma = 2$.

الحل

نعتبر 0، 1 و∞ نقاطا نرغب في تصويرها إلى الرؤوس ذات الزوايا الخارجية -$\pi\alpha$ ، -$\pi\beta$ و-$\pi\gamma$ على التوالي، حينئذٍ تكون صورة الدالة على النحو الآتي :

$$f(z) = A + B \int_o^z \frac{dz}{z^{\alpha}(z-1)^{\beta}} \; .$$

وبما أن A وB نادرا ما تؤثر في مكان المثلث وحجمه، فإنه لإيجاد أبسط الصيغ لموضع الرؤوس، نضع $A = 0$ و $B = e^{i\pi\beta}$:

$$f(z) = \int_o^z \frac{dz}{z^{\alpha}(z-1)^{\beta}} \; .$$

إذن $f(0) = 0$ و :

$$f(1) = \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}(1-x)^{\beta}} = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\gamma)} \; .$$

وتحقــق دالة "جاما" (gamma function) المتطابقة $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi(\sin x\pi)^{-1}$ ، ولذا فإن طول هذا الضلع هو :

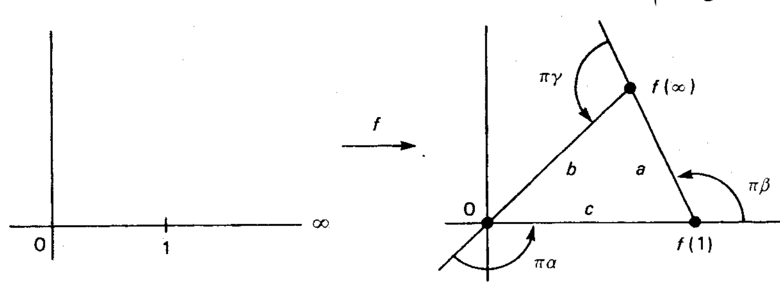
$$c = \frac{1}{\pi} \sin \pi\gamma \; \Gamma\;(1\text{-}\alpha)\; \Gamma\;(1 \quad \beta)\; \Gamma\;(1-\gamma) \; .$$

باستخدام قانون الجيب، نجد أن طولي الضلعين الآخرين هما :

$$a = \frac{1}{\pi} \sin \pi\alpha \; \Gamma\;(1\text{-}\alpha)\; \Gamma\;(1 \quad \beta)\; \Gamma\;(1-\gamma).$$

$$b = \frac{1}{\pi} \sin \pi\beta \; \Gamma\;(1\text{-}\alpha)\; \Gamma\;(1 \quad \beta)\; \Gamma\;(1-\gamma) \; .$$

[انظر الشكل رقم (٥,٢٣)].



المستوى - z المستوى - w

الشكل رقم (٥,٢٣).

مثال (٥, ٦, ٥)

صور نصف المستوى العلوي إلى داخل مستطيل.

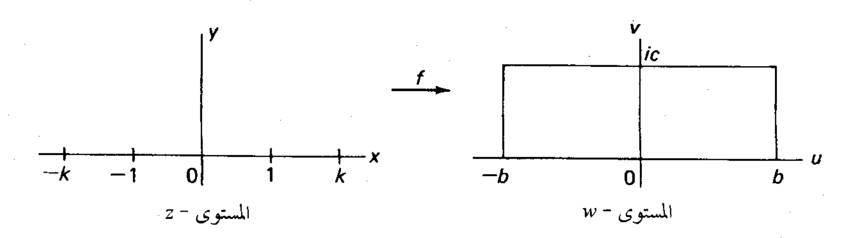
الحـــل

يمكن بوساطة التمرين (٦) في البند (٥,٣) لأي أربـع نقـاط على الخـط الحقيقـي أن تصور بوساطة تحويل كسري خطي إلى النقاط $\pm k$ و ± 1 حيث $1 < k$ (اعكس إذا كان ضروريا). وعليه فإن مثل هذا التحويل يعطى بوساطة :

$$f(z) = \int_o^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)}} .$$

[انظر الشكل رقـم (٥,٢٤)] ويتضـح مـن هـذه الصيغـة أن رؤوس المسـتطيل متماثلـة بالنسبة إلى المحور التخيلي وأن :

$$b = \frac{1}{k} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k^1-k^{-2}x^2)}} = \frac{1}{k} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{k}\right)$$



الشكل رقم (٥,٢٤).

(تكامل ناقصي (elliptic) من النوع الأول)،

$$ic = \int_1^k \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k^2-x^2)}} = \frac{i}{k} \int_1^k \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^{-2}x^2)}}$$

تمارين (٥,٦)

(١) أوجد خطوط الانسياب لمائع غير مضغوط ينساب بسرعة A (>0) عند ∞ للمنطقة المظللة في المستوى $w-$ في الشكل رقم (٥,٢١).

(٢) أوجد دالة تصور نصف المستوى العلوي فوق المنطقة المظللة في المستوى $w-$ في الشكل (٥,٢١) وتنقل النقاط 0، 1 و∞ إلى 0، i و0.

(٣) بين أن الدالة :

$$f(z) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(z^2-1)}} \,.$$

تصور نصف المستوى العلوي إلى مربع طول ضلعه :

$$a = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t^{3/4}\sqrt{1-t}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{2\pi}}$$

(٤) باستخدام تحويل "شفارتز كريستوفيل" أوجد دالة تنقل نصف المستوى العلوي إلى الشريحة اللانهائية $|y| < 1$.

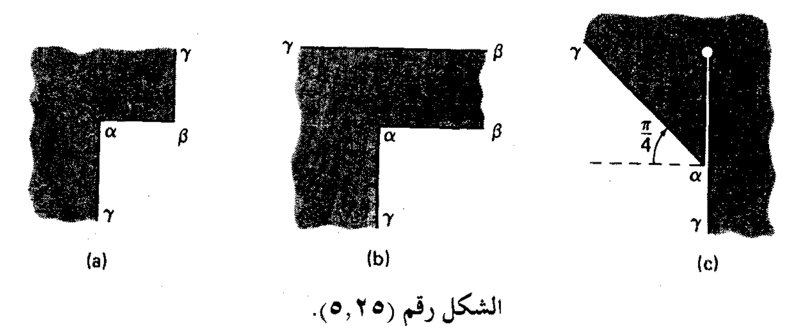
(٥) صور نصف المستوى تصويرا حافظا للزوايا إلى المنطقة الواقعة خارج نصف الشريحة $|x| < \pi/2$ حيث $y > 0$.

(٦) صور نصف المستوى تصويرا حافظا للزوايا إلى كل من المناطق الموضحة بالشكل (٥,٢٥) حيث إن $0, 1, \infty \to \alpha, \beta, \gamma$ على التوالي.

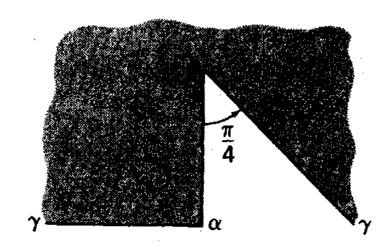
(٧) صور نصف المستوى العلوي تصويرا حافظا للزوايا فوق المنطقة المرسومة بالشكل (٥,٢٦)، وبين أن الطول (مع $|B| = 1$) للقطعة المستقيمة من α إلى β يساوي $12\sqrt{2\pi}/5\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$.

*(٨) صور نصف المستوى العلوي تصويرا حافظا للزوايا فوق المنطقة الموجودة بالشكل (٥,٢٧) مع $0\ ,\ x\ ,\ 1,\ \infty\ \to \alpha, \beta, \gamma, \delta$ على التوالي، وبيّن أن $x = k^2$ حيث $0 < k < 1$.

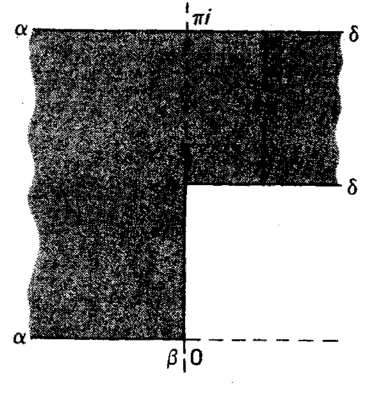
(**إرشاد للحل**: افترض أن $(s^2 = (z-1)/(z-x))$.



الشكل رقم (٥,٢٥).



الشكل رقم (٥,٢٦).

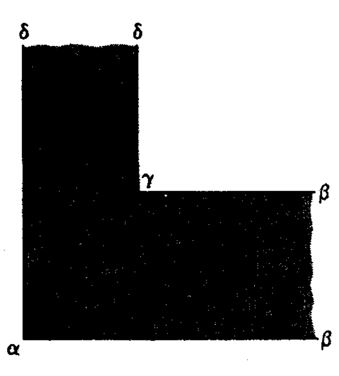


الشكل رقم (٥,٢٧).

*(٩) بيّن أن :

$$f(z) = A \left[Log \frac{\sqrt{z}+\sqrt{z-a}}{\sqrt{z}-\sqrt{z-a}} - i\sqrt{a-1}\; Log \frac{i\sqrt{z(a-1)}+\sqrt{z-a}}{i\sqrt{a(a-1)}-\sqrt{z-a}} \right] + B$$

تصور نصف المستوى العلوي تصويرا حافظا للزوايا إلى المنطقة المظللة بالشكل (٥,٢٨) مع أخذ $0, x, 1, \infty \rightarrow \alpha, \beta, \gamma, \delta$ حيث $a = 1 + (h^2 / H^2)$.



الشكل رقم (٥,٢٨).

(٥,٧) تطبيقات فيزيائية في الانسياب الحراري والكهربية الساكنة (اختياري)

Physical Applications in Heat Flow and Electrostatics (Optional)

نطور في هذا البند النظرية الأساسية للانسيابات الحرارية في بعدين في حالة الاتزان، وكذلك الحقول الكهربائية الساكنة. من المهم أن نلاحظ التشابه بين هذه الانسيابات وانسياب الموائع (fluid flow). وفي البند التالي نعرض تطورا مختصرا لنظرية الأثر في الموائع (wakes in fluid).

الانسياب الحراري Heat flow

يمكن أن نصل إلى دراسة التوصيل الحراري لجسم صلب متجانس بنفس الطريقة التي وصلنا بها إلى انسياب الموائع ، إذا كان الانسياب في الجسم الصلب ذا

بعدين ، وكان الانسياب الحراري في حالة اتزان (steady state). افترض أنه لا توجد مصادر حرارية أو تصاريف في منطقة بسيطة الترابط G (simply connected region). وبما أن نقطتين يمكن أن يكون لهما درجات حرارة مختلفة ، فإنه يوجد انسياب للحرارة ، من الأجزاء الأكثر سخونة إلى الأكثر برودة. ومتجه الانسياب الحراري (heat flow vector) $Q = Q(z)$ يمكن أن يكتب كدالة مركبة متصلة . وتدفق الحرارة من داخل منحنى مغلق γ أملس جزئيا موجود في G إلى الخارج يجب أن يحقق :

$$\int_\gamma Q_n\, ds = 0 ,$$

وإلا على النقيض سوف تتغير درجة الحرارة الداخلية. وبما أن الحرارة تنساب من الأجزاء الساخنة إلى الباردة ، فهي غير دورانية (irrotational) ، ولذا نحصل على :

$$\int_\gamma Q_n\, ds = 0 ,$$

وهكذا ، وبوساطة نظرية "موريرا" (كما في البند (٥,٥)) نرى أن $\overline{Q}$ دالة تحليلية في G. إذن :

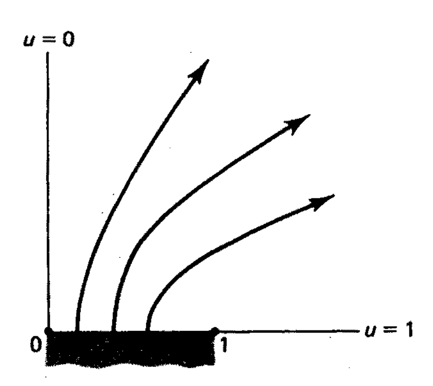
$$Q(z) = -k\, \overline{w'(z)}$$

حيث k معامل الاتصال الحراري (thermal conductivity) وأن $w = u + iv$ هو الجهد المركب (complex potential) للحقل الحراري. ومن معادلتي كوشي ـ ريمان نجد أن $\overline{w'(z)} = u_x + iu_y = \text{grad}\, u(z)$ ، التدرج في u ، ولذا فإن $Q = -k\, \text{grad}\, u$ (قانون فوريه) يؤدي إلى أن يكون الانسياب الحراري عموديا على المنحنيات $u(z) = \text{constant}$. وعليه تكون النقاط على هذه الخطوط المستقيمة لها حينئذٍ درجات حرارة متساوية ، وعليه فإن المنحنيات $v(z) = \text{constant}$ هي منحنيات تساوي الحرارة (isothermal) و $u(z)$ هي درجة الحرارة. وتسمى المنحنيات $v(z) = \text{constant}$ "خطوط الانسياب stream lines" وهي عمودية على خطوط تساوي الحرارة.

والمشكلة المتكررة في الانسياب الحراري في حالة الاتزان هي إنشاء منحنيات تساوي الحرارة في منطقة G لها درجات حرارة حدودية معطاة.

مثال (٥,٧,١)

أوجد منحنيات تساوي الحرارة للشريحة G المدونة بالشكل (٥,٢٩)، ومعزولة على امتداد القطعة المستقيمة $y = 0$ حيث $0 < x < 1$، ذات درجة الحرارة 0° على امتداد $z = y \geq 0$ و 1° على امتداد $z = x \geq 1$.



الشكل رقم (٥,٢٩).

الحـــل

الدالة $w = (2/\pi)\sin^{-1} z$ تصور G إلى $0 < u < 1$ و $v > 0$ وهي تمثل الجهد المركب. إذن :

$$z = \sin\frac{\pi}{2}w = \sin\frac{\pi}{2}u\,\cosh\frac{\pi}{2}v + i\cos\frac{\pi}{2}u\,\sinh\frac{\pi}{2}v.$$

حينئذ نجد أن :

$$\frac{x^2}{\sin^2\frac{\pi}{2}u} - \frac{y^2}{\cos^2\frac{\pi}{2}u}$$

ويؤدي ذلك إلى أن خطوط تساوي الحرارة قطوع زائدة.

مثال (٥,٧,٢)

أوجد منحنيات تساوي الحرارة للرقيقة G المكونة كما بالشكل (٥,٢٥) والمعزولة على امتداد القطعة المستقيمة التي تربط $\alpha=0$ بالنقطة $\beta=1$، وبدرجة حرارة -1° على الشعاع الواصل من α إلى γ و 1° على الشعاع الواصل من β إلى γ.

الحـــل

بما أن الزاويتين الخارجيتين عند 0 و1 هما $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ على الترتيب فإن تحويل شفارتز- كريستوفيل:

$$z = 1 + \frac{i}{\pi}\int_1^{\zeta} \sqrt{\frac{\zeta+1}{\zeta-1}}\, d\zeta = 1 + \frac{i}{\pi}\left[\sqrt{\zeta^2-1} + \cosh^{-1}\zeta\right]$$

يصور نصف المستوى العلوي فوق G مع تصوير $-1,\ 1,\ \infty \ \to\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$. ولكن $\zeta = \sin(\pi w/2)$ تصور الشريحة إلى نصف المستوى العلوي لذا فإن:

$$z = 1 + \pi^{-1}\left[i\cosh^{-1}\left(\sin\frac{\pi w}{2}\right) - \cos\frac{\pi w}{2}\right]$$

تصور الشريحة العلوية إلى G. إذن معكوسها $w = w(z)$ هو الجهد المركب. وكما في المثال (٥,٧,١) فإن منحنيات تساوي الحرارة، سوف تصبح صور الدالة $z = z(w)$ للخطوط الرأسية u حيث $u = \text{constant}$. وبتبسيط الحد الأول في القوس، نجد أن:

$$z = \frac{w+1}{2} - \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi w}{2},$$

والتي يمكن بها أن نرسم منحنيات تساوي الحرارة.

الكهربية الساكنة Electrostatics

اعتبر حقل مستوى كهربية ساكنة $E(z)$ ينشأ من التجاذب أو التنافر لنظام اختياري من الشحنات (ينابيع ومصاب) في المستوى. في منطقة بسيطة الترابط G مكملة لهذه الشحنات، فإنه لا توجد شحنات داخل منحنى مغلق أملس جزئيا في G، لذا فإن:

$$\int_{\gamma} E_n \, ds = 0 ,$$

بوساطة قانون جاوس (Gauss`s law). نعرف التفاف الحقل (the circulation) بأنه الشغل المبذول بوساطة الحقل عندما تؤخذ بالكامل وحدة الشحنة الموجبة حول المنحنى γ. ولعدم وجود مطلب لإنفاق الطاقة لإبقاء حقل كهربية ساكنة نحصل على:

$$\int_{\gamma} E_s \, ds = 0 ,$$

إذن E تسمى جهد الحقل (Potential field)، $\overline{E}/i$ تحليلية، والدالة الأصلية لها هي $iw = -v + iu$ وتسمى الجهد المركب للحقل (complex potential)، $-v$ هي دالة القوى (force function) و u دالة الجهد (Potential field). من معادلتي كوشي ريمان نجد أن:

$$E = -\overline{w'(z)} = -(u_x + iu_y) = -\text{grad}\, u .$$

المنحنيات $v(z) = \text{constant}$ هي خطوط القوى (lines of force)، $u(z) = \text{constant}$ هي خطوط تساوي الجهد (equipotntial lines).

يمكننا تجميع كل المتشابهات بين انسياب الموائع، وانسياب الحرارة، والكهربية الساكنة وتقديمها في صورة جدولية، كما فعلنا بالجدول (١,٥)، وبالمثل يمكن أن تصنع المتشابهات لانسياب المائع مع حالة انتشار متزن (steady statedifusion)، والمغناطيسية الاستاتيكية، وحقول الجاذبية (Gravitation fields) وميكانيكا الموائع (Hydromechics).

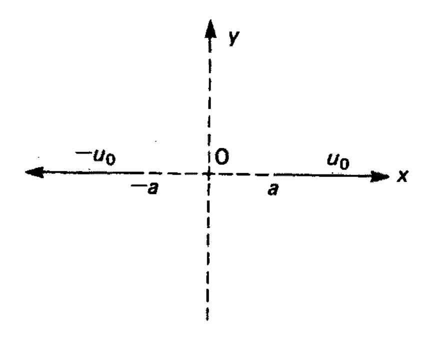
الجدول رقم (١ ,٥). المتشابهات في انسياب الموائع، والانسياب الحراري، والحقول الكهربية الساكنة.

	انسياب الموائع	الانسياب الحراري	الكهربية الساكنة
الجهد المركب	$w(z) = u + iv$	$w(z) = u + iv$	$iw(z) = -v + iu$
الحقل المتجه	$V = \overline{w'(z)} = \text{grad } u$	$Q = -k\,\overline{w'(z)} = -k \text{ grad } u$	$E = -\overline{w'(z)} = -\text{ grad } u$
u	دالة الجهد	درجة الحرارة	دالة الجهد
$u(z) = \text{constant}$	خطوط تساوي الجهد	خطوط تساوي الحرارة	خطوط تساوي الجهد
v	دالة الانسياب	دالة الانسياب	v تمثل دالة القوة
$v(z) = \text{constant}$	خطوط الانسياب	خطوط الانسياب	خطوط القوة

ونرغب بالتتابع في إيجاد خطوط تساوي الجهد لحقل كهربية ساكنة بالمستوى، محدود بمسارات (conductors) يكون الجهد عليها معطى (كل مسار موصل conductor).

مثال (٥,٧,٣)

يتألف مكثف من لوحين لهما صورتا أنصاف مستويات واقعة في مستوى واحد، وله حواف متوازية متباعدة بمسافة $2a$ وفرق جهد $2u_0$. وأي مقطع عمودي على المستويات يعطي حقل مستوى له قطعان (انظر الشكل (٥,٣٠). أوجد خطوط تساوي الجهد لهذا الحقل.



الشكل رقم (٥,٣٠).

الحــــل

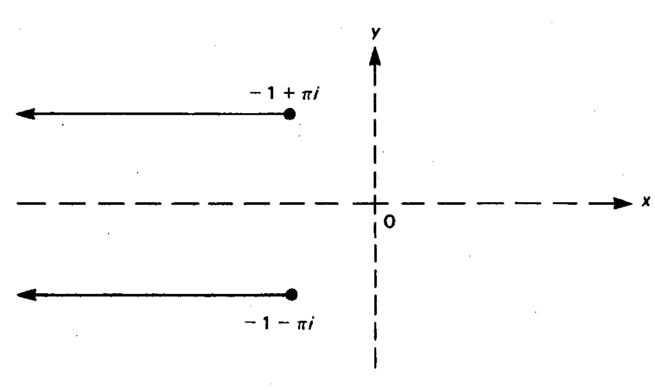
$$w = \frac{2u_0}{\pi}\ \sin^{-1}\left(\frac{z}{a}\right) .$$

تصور النطاق فوق الشريحة $|u| < u_0$. وعليه تكـون خطـوط تسـاوي الجـهد هـي القطوع الزائدة:

$$\frac{x^2}{a^2 \sin^2 \frac{\pi u}{2u_0}} - \frac{y^2}{a^2 \cos^2 \frac{\pi u}{2u_0}} = 1 .$$

مثال (٥,٧,٤)

يتـألف مكثـف متـوازي اللوحـين مـن نصفـي مسـتويين متوازيـين لهمـا حـواف متباعدة بمسافة 2π، وفرق جهد $2u_0$. وأي مقطع عمودي على المستويين يولد حقـلا في بعدين لـه قطعـان كمـا هـو مبين بالشـكل (٥,٣١). أوجـد خطـوط تسـاوي الجـهد لهـذا الحقل.



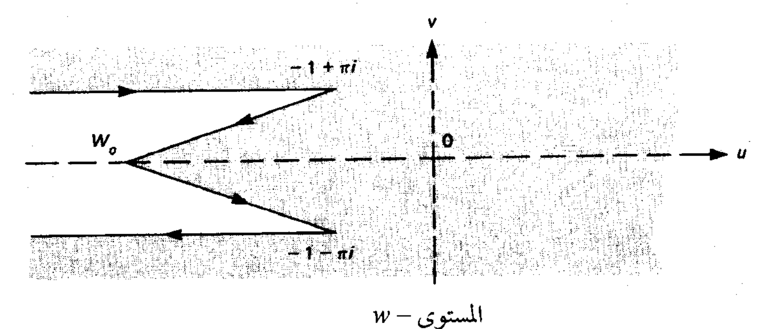
الشكل رقم (٥,٣١).

الحــــل

انظر إلى المنطقة المظللة في الشكل (٥,٣٢). بجعل w_0 تؤول إلى ∞ - نحصل على المنطقة في الشكل (٥,٣٢) كحالة نهائية. وبوساطة التماثل تصور النقاط ∞ ، 1، 0 و1-

لمحيط نصف المستوى العلوي إلى الرؤوس للمنطقة المظللة في الشكل (٥,٣٢). حيث إن الزوايا الخارجية عند $1+\pi i$ ، w_0 ، $-1-\pi i$ و∞ تؤول إلى $\pi, -\pi, \pi$ و π عندما تقترب w_0 من $-\infty$ ، فإن صيغة شفارتز-كريستوفيل تعطى :

$$w = A + B \int^{z} \frac{(z+1)(z-1)}{z}\, dz = A + B \left(\frac{1}{2} z^2 - \log z \right)$$



المستوى $- w$

الشكل رقم (٥,٣٢).

لأن القيم للنهاية الدنيا للتكامل (المحسوب عند نقاط ، تختلف عن الصفر) امتصت في الثابتين A و B . وإيجاد هذا التعبير عند $z = \pm 1$ يؤدي إلى النظام :

$$A + B/2 = -1 \quad \pi i$$

$$A + B\left(\frac{1}{2} - \pi i\right) = -1 + \pi i ,$$

ذات الحل $A = -\pi i$ ، $B = -2$ و$z^2 - \pi i$ $w = 2 \operatorname{Log} z$. لاحظ الآن أن نصف المستوى العلوي يمكن أن يصور إلى الشريحة $|\operatorname{Im}\zeta| < \pi i$ بوساطة الدالة$\zeta = 2 \operatorname{Log} z - \pi i$.

وبالنظر إلى الدوال في الشكل (٥,٣٣) فإنه من الواضح أن الدالة :

$$w = 2\operatorname{Log} z - \pi i - z^2 = \zeta + e\zeta$$

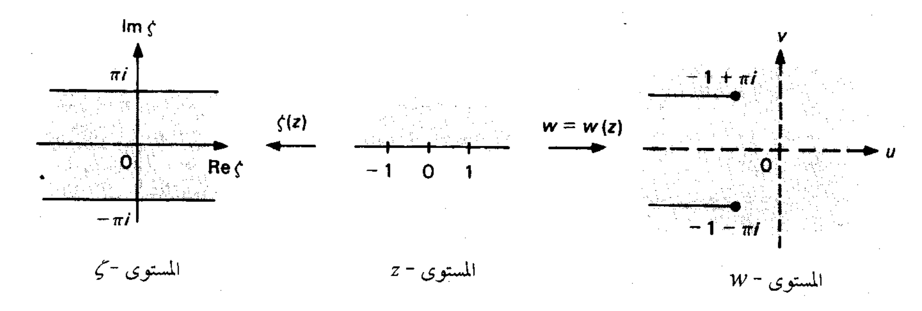
تصور الشريحة $|\text{Im}\zeta| < \pi i$ تصويرا حافظا للزوايا إلى المنطقة المظللة في المستوى -w.
بما أن خطوط تساوي الجهد توازي المحور الحقيقي في المستوى -ζ، فيمكن أن نحصل على خطوط تساوي الجهد في المستوى - w.

وتعطى في الصورة الوسيطة (Parametric form) بوساطة :

$$u = \xi + e^{\xi} \cos \eta$$

$$v = \eta + e^{\xi} \sin \eta$$

حيث η ثابت و $\zeta = \xi + i\eta$.

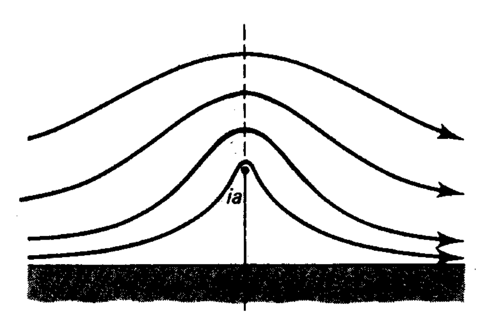


الشكل رقم (٥,٣٣).

تمارين (٥,٧)

(١) أوجد الجهد للكهربية الساكنة في المنطقة المحصورة بين أسطوانة مصمتة توازي لوحا مسطحا، علما بأن الجهد على الأسطوانة يساوي 1 والجهد على اللوح يساوي 0. افترض أن هناك مقطعا يضع اللوح على المحور التخيلي، وأن الأسطوانة أعطيت بوساطة $|z-2| \leq 1$.

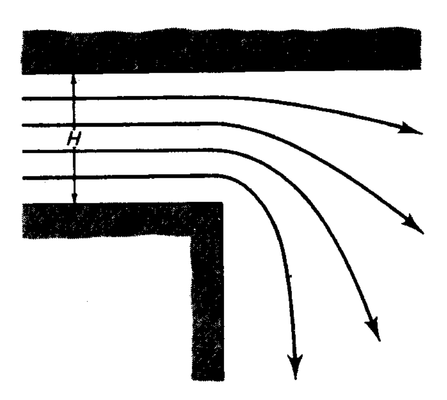
(٢) أوجد خطوط انسياب سدٍ ذي ارتفاع a إذا كان الانسياب لانهائي العمق، والسرعة $A > 0$ عندما $z \to \infty$. ما السرعة عند 0 وعند ia (انظر الشكل (٥,٣٤)).



الشكل رقم (٥,٣٤).

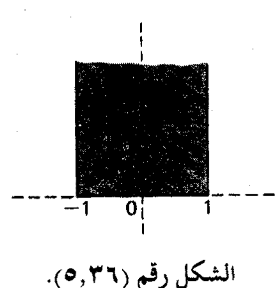
(٣) أوجد خطوط تساوي الحرارة في بلاطة لانهائية $0 < y < \pi$ إذا كانت الحواف معزولة لقيم $x < 0$ ودرجة الحرارة تحقق $u(x) = 0^\circ$ و $u(x + i\pi) = 1^\circ$ لقيم $x \geq 0$.

(٤) أوجد الجهد المركب ونقاط الركود لانسياب مائع غير مضغوط خلال المنطقة المظللة بالشكل (٥,٣٥) (افترض أن السرعة الابتدائية للانسياب هي A).



الشكل رقم (٥,٣٥).

(٥) أوجد خطوط تساوي الحرارة للوح مدون بالشكل (٥,٣٦) وله درجة حرارة 0° على الجهة الأفقية و 1° على الجهات الرأسية.

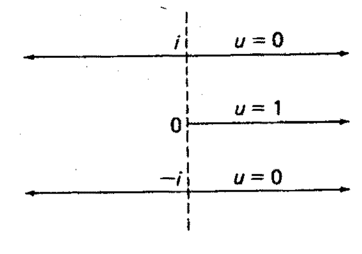


الشكل رقم (٥,٣٦).

(٦) يتألف مكثف من ثلاثة ألواح متوازية: المتوسط نصف مستوى، والآخران مستويان لهما مقاطع وجهد كما هو مدون بالشكل (٥,٣٧).

أوجد تعبيرا لخطوط تساوي الجهد.

(**إرشاد للحل**: استخدم دالة شفارتز-كريستوفيل).



الشكل رقم (٥,٣٧).

(٧) بيّن أن الدالة:

$$v = \text{Im}\left[e^{-i\alpha} z(\cos\alpha + i\sin\alpha\sqrt{1-(e^{i\alpha}/z)^2})\right]$$

هي دالة الانسياب للمجرى حول صفيحة رقيقة ذات طول 2 وتميل بزاوية α مع الأفقي، عندما تكون $V(\infty) = A\ (>0)$.

(٥,٨) الأثر في انسياب الموائع (اختياري)

Wakes in a Fluid Flow (Optimal)

اعتبر التأثير المباشر للانسياب ذي عرض لا نهائي وسرعة A (>0) على رقيقة ثابتة لها عرض $4a$ وضعت بزاوية قائمة على الانسياب (انظر الشكل (٥,٣٨)).

الدالة :

$$\zeta = z - a^2/z$$

تصور خارج الدائرة $|z| = a$ تصويرا حافظا للزوايا إلى هذه المنطقة. باستخدام الدوال الثلاث الموضحة في الشكل (٥,٣٨) يعطى الجهد للانسياب حول الرقيقة الثابتة بوساطة :

$$w(\zeta) = Aw = A\ (z + a^2/z) = A\ (2z - \zeta) = \pm A\ \sqrt{\zeta^2 + 4a}$$

المستوى $-\omega$
(أ)

المستوى $-z$
(ب)

المستوى $-\zeta$
(جـ)

الشكل رقم (٥,٣٨).

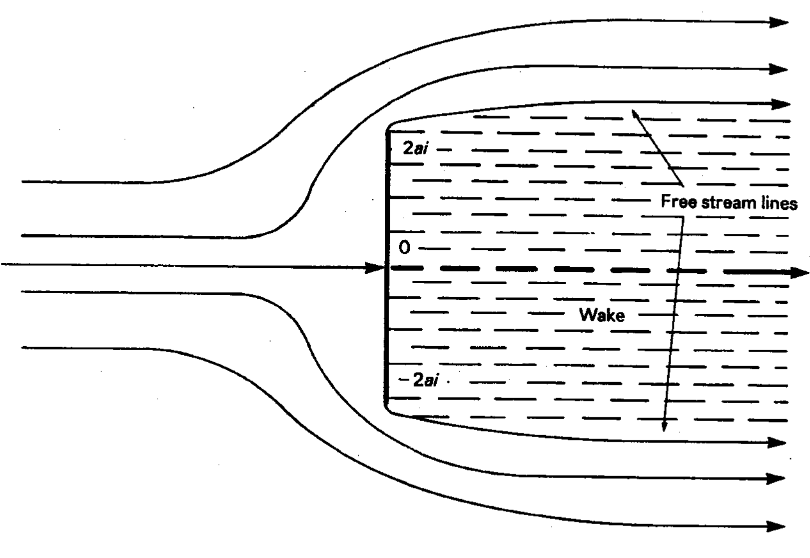
لأن :

$$0 = 4(z^2 - \zeta z - a^2) = (2z - \zeta)^2 - (\zeta^2 + 4a^2).$$

يمكن أن يستخدم الجهد المركب لحساب خطوط الانسياب والسرعة للانسياب عند أي نقطة ζ هي :

$$V = \overline{w}' = \pm \frac{A\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + 4a^2}}.$$

وتنشـأ عنـد هـذه النقطـة مشكلـة ليسـت في الحسبان وهي أن السرعة عند $\zeta = \pm 2ai$ لا نهائية. وبما أن السرعة اللانهائية ليست ممكنة فيزيائيا ، فيجب أن نبحث عن حل واقعي لهذه المشكلة. وإحدى هذه الفروض هي وجود منطقة لا نهائية من الماء في حالة سكون(water at rest) ، تسمى الأثر (wake) خلف الرقيقة. وسوف يكون الأثـر محدودا بوساطة خطوط السيل الحر وتكون السـرعة على امتدادهـا ثابتـة محـدودة (انظر الشكل رقم (٥,٣٩)).



الشكل رقم (٥,٣٩). الأثر خلف رقيقة معدنية.

يتطلب وجود الأثر تغيرا في تحليل المشكلة لأن الانسياب يحدث في مضلع محدود بوساطة الصفيحة وخطوط الانسياب الحرة .

وتضمن نظرية التصوير لريمان أن المضلع يمكن أن يصور تصويـرا حافظا للزوايا فـوق نصـف المستوى العلـوي مـع انتقـال النقـط $\pm\ 2ai$ إلى $\pm\ 1$. ويمكـن أن تحسـب

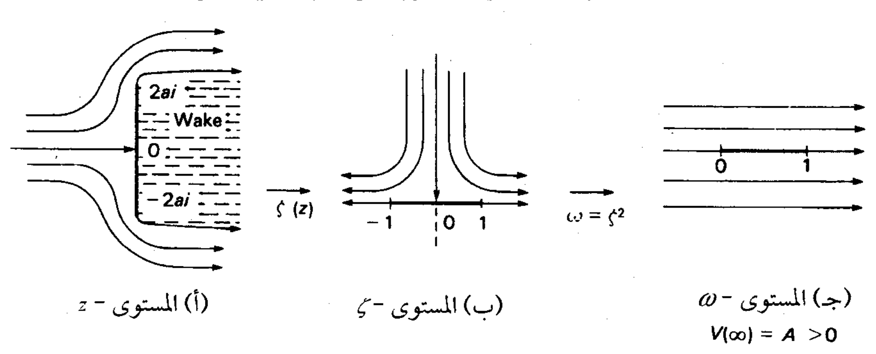
خطـوط السيـل في نصـف المستـوى العلـوي بوساطة خطـوط السـيل الموجـودة في المستوى w- في الشكل (٥,٤٠)جـ .

ولحساب الجهد المركب $w(z)$، نذكر أن $\overline{V(z)} = dw/dz$ ونعتبر الدالة :

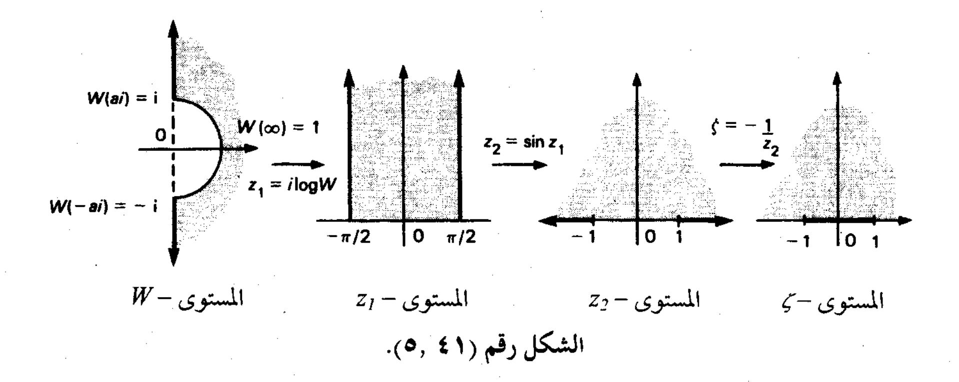
$$W(z) = A/\overline{V(z)} = A/w'(z)$$

على امتداد الرقيقة، تكون السرعة موازية لمحور الصادات، إذن، V تكون تخيلية تماما. وبوساطة التماثل، ستكون قيمة السرعة متساوية عند $\pm 2ai$، بالرغم من أن الاتجاه سوف يكون مضادا. وأخيرا ستكون السرعة ثابتة على كل خط انسياب حر. هكذا، وبما أن $V(+\infty) = A$ وخطوط الانسياب الحر تؤول إلى ∞ ، فإن كل نقطة على خطي الانسياب الحر سوف تصور إلى النصف الأيمن من دائرة الوحدة. وبما أن $V(0) = 0$ ، فإن نقطة الأصل تصور إلى ∞ ، أكثر من ذلك تكون $V(-1)$ موجبة وأقل من A، لأن الانسياب يتباطأ عندما يقترب من الرقيقة. وعليه، يصور الانسياب إلى المنطقة المظللة بالمستوى w- في الشكل (٥,٤١). تسمى هـذه المنطقة منطقة تقوس المنحنى (hodograph). لاحظ أن هذه المنطقة تصور فوق النصف العلوي من المستوى ζ- بوساطة التحويل :

$$\zeta = -[\sin(i \log W)]^{-1} = i[\sinh(\log W)]^{-1}$$



الشكل رقم (٥, ٤٠).



الشكل رقم (٤١, ٥).

وتنقل النقاط 1 ، ∞ ، $-i$ ، و i إلى ∞ ، 0 ، 1- و 1 ، لهذا :

$$\sinh(\log W) = \frac{i}{\zeta} \quad ,$$

أو بوساطة التمرين (٢٤) بالبند (١,٩) فإن :

$$\log W = \sinh^{-1}\left(\frac{i}{\zeta}\right) = \log\left[\frac{i}{\zeta} + \sqrt{1-\frac{1}{\zeta^2}}\right] .$$

وبما أن $W = A/w'(z)$ ، فإن المعادلة العلوية تؤدي إلى :

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{dw}{dz} = \frac{\zeta}{i+\sqrt{\zeta^2-1}} = \frac{\sqrt{\zeta^2-1}-i}{\zeta} .$$

ولكن :

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{d\zeta} \quad \text{و} \quad \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz}$$

لكي :

$$2\zeta \frac{d\zeta}{dz} = \frac{\sqrt{\zeta^2-1}-i}{\zeta}$$

ولهذا :

$$z = 2\int \left[\sqrt{\zeta^2-1}+i\right] d\zeta = \zeta\sqrt{\zeta^2-1} - \cosh^{-1}\zeta + 2i\zeta + c$$

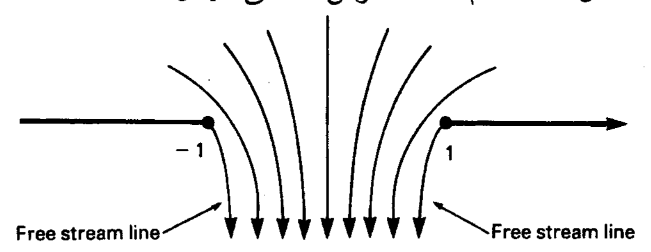
$$= \sqrt{\omega(\omega-1)} - \cosh^{-1}\sqrt{\omega} + 2i\sqrt{\omega} + c\,.$$

بما أن $\omega = 0$ تناظر $z = 0$ فإن $c = \cosh^{-1} 0 = -i\cos^{-1} 0 = -i\pi/2$. الآن حلت المشكلة على الأقل في الصورة الضمنية، لأن خطوط الانسياب تعطى بوساطة المنحنيات $\text{Im}\ \omega = \text{constant}$.

تمارين (٥,٨)

(١) اعتبر فيضا يتدفق من فتحة بقاع سفينة كبيرة شكل (٥,٤٢). افترض أن المائع تدفق كنافورة محدودة بوساطة خطوط انسياب على امتدادها وقيمة السرعة ثابتة، والانسياب في النافورة منتظم ويوازي المحور التخيلي عند ∞. أوجد خطوط السيل الحر.

(**إرشاد للحل**: استخدم منطقة تقوس المنحنى hodograph).



الشكل رقم (٥,٤٢). انسياب نافورة.

(٢) افترض أن أثرا تكون خلف السد في التمرين (٢) البند (٥,٧). أوجد خطوط الانسياب الحرة.

ملاحظات

البند (٥,١)

لقد أعطي جدول للدوال حافظة الزوايا في الملحق، ودوال أخرى توجد في المرجع $[K_0]$ ويوجد برهانان مختلفان لنظرية لريمان في المرجع [V].

البند (٥,٢)

تعرف التحويلات الكسرية الخطية أيضا على أنها تحويلات خطية ، أو تحويـلات مزدوجة الخطية (bilinear) أو تعويضات خطية ، أو تحويلات موبيس (Mobius transforms).

البند (٥, ٥)

ستناقش المشكلات المحتوية على منابع في الفصل السادس كما توجد بعض التطبيقات في المرجع [R]. انظر أيضا [MT] إذ إنه مرجع ممتاز يناقش بالتفصيل استخدام التحليل المركب في ميكانيكا الموائع.

البند (٥, ٧)

انظر المرجع [A, pp. 227-232] لبرهان صيغة "شفارتز-كريستوفيل" وفيه يمكن استخلاص صيغة لتصوير قرص الوحدة إلى "خارج" المضلع بسهولة.

البند (٥,٨)

توجد مناقشة كاملة للأثر والنوافير (wakes and jets) في المرجع [MT].

الفصل السادس

مسائل القيم الحدية والقيم الابتدائية

BOUNDARY VALUES AND INITIAL VALUES PROBLEMS

(٦,١) الدوال التوافقية

Harmonic Functions

تعتبر "معادلة لابلاس Laplace equation" $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ذات أهمية أساسية في الفيزياء ، فهي تظهر في اتصالها بالانسياب الحراري وانسياب الموائع. كما تظهر مع مجال الجاذبية ومجال الكهربية الساكنة. فعلى سبيل المثال ، تمثل درجة الحرارة u في الانسياب الحراري الجزء الحقيقي من الدالة التحليلية $w = u+iv$. ومن معادلتي كوشي - ريمان نحصل على :

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x = (v_x)_y = (- u_y)_y = - u_{yy}$$

إذن الدالة u تحقق معادلة لابلاس ، وبالمثل يكون للدالة v.

تسمى أي دالة حقيقية $u\,(x, y)$ ذات تفاضلات جزئية متصلة حتى الرتبة الثانية ، وتحقق معادلة لابلاس في منطقة G بالدالة التوافقية (harmonic) في G.

مثال (٦, ١, ١)

بين أن الدالة $u\,(x\,,y\,) = x^2 - y^2$ توافقية في G.

الحل

للدالة u مشتقات متصلة من الرتبة الأولى والثانية :

$$u_x = 2x, \qquad u_y = -2y$$

$$u_{xx} = 2, \qquad u_{xy} = u_{yx} = 0, \qquad u_{yy} = -2$$

وفوق ذلك فإنها تحقق معادلة لابلاس لأن :

$$u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$$

إذن u توافقية في C ، لاحظ أن $u = \text{Re}\,(z^2)$.

ترتبط الدوال التوافقية بعلاقة وثيقة بالدوال التحليلية كما تبينه النظرية التالية.

نظرية

(١) لتكن $f(z) = u(z) + iv(z)$ دالة تحليلية في المنطقة G. عندها كلا الدالتين الحقيقيتين $u(z)$ و $v(z)$ دالتان توافقيتان في G.

(٢) لتكن $u(z)$ دالة حقيقية وتوافقية في منطقة بسيطة الاتصال. عندها التكامل الخطي :

$$v(z) = \int_{\gamma} u_x dy - u_y\, dx\,,$$

حيث γ أي قوس أملس قطعيا في G يصل z_0 و z ، هو دالة توافقية في G ، والدالة $f(z) = u(z) + iv(z)$ تحليلية في G. (تسمى $v(z)$ المرافق التوافقي Harmonic conjugate للدالة $u(z)$).

البرهان

(١) إذا كانت $f = u + iv$ دالة تحليلية في G. فإن ذلك يحدث للدالة :

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y\,.$$

هكذا تكون المشتقات من الرتبة الثانية للدالتين u و v متصلة ، $u_{xy} = u_{yx}$ و $v_{xy} = v_{yx}$ من حساب التفاضل ، وبتطبيق معادلتي كوشي ـ ريمان ، نحصل على :

$$u_{xx} = (v_y)_x = (v_x)_y = -u_{yy} \quad \text{و} \quad u_{xx} = (-u_y)_x = -(u_y)_y = -v_{yy}$$

ويؤدي ذلك إلى أن كلا من u و v تحقق معادلة لابلاس.

(٢) للدالة $F(z) = u_x - iu_y$ مشتقات متصلة من الرتبة الأولى وتحقق معادلتي كوشي- ريمان على G.

$$(u_x)_x = (-u_y)_y \qquad \text{و} \qquad (u_x)_y = -(-u_y)_x$$

لأن u توافقية. وهذه شروط كافية لتجعل الدالة $F(z)$ تحليلية على G. وبما أن G منطقة بسيطة متصلة، فإنه يمكن أن نستخدم النظرية الأساسية لتعريف مشتقة عكسية للدالة $F(z)$:

$$f(z) = \int F(z)\,dz = \int (u_x \quad iu_y)(dx + idy)$$
$$= \int (u_x dx + u_y dy) + i \int (u_x\, dy - u_y dx)$$

ودالة التكامل الأولى هي التفاضل التام (exact differential) للدالة $u = u(x,y)$ حيث إن:

$$f(z) = \int du + i\int u_x dy - u_y dx = u(z) + i\int u_x dy - u_y dx$$

هكذا نكون قد أنشأنا دالة تحليلية $f(z)$ يكون جزؤها الحقيقي هو $u(z)$ هذا يعني أن التكامل:

$$v(z) = \int u_x dy - u_y dx$$

المعرف مع وجود ثابت اختياري ودالة توافقية في G.■

سنوضح استخدام التكامل السابق في حساب المرافق التوافقي في الأمثلة التالية.

مثال (٦,١,٢)

أوجد المرافق التوافقي المعرف على C للدالة:

$$u = x^2 - y^2$$

الحل

وضحنا في مثال(٦,١,١) أن الدالة u توافقية على C. بما أن $u_x = 2x$ و $u_y = -2y$

فإننا نحصل على :

$$v(z) = \int u_x dy - u_y dx = \int 2xdy + 2ydx = 2\int d(xy) = 2xy + c .$$

لاحظ أن v توافقية على C، لأن $v_{xx} = v_{yy} = 0$ وأن :

$$f(z) = u + iv = (x^2 - y^2) + 2ixy + c = z^2 + c .$$

دالة تحليلية شاملة (entire).

مثال (٦,١,٣)

هل توجد دالة تحليلية $f = u + iv$ بحيث إن :

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ ؟}$$

الحل

لاحظ أن f غير معرفة عند نقطة الأصل، وعليه سوف نبحث عن مرافق توافقي للدالة u على منطقة متصلة بسيطة من $C - \{0\}$ سنبين أولا أن u دالة توافقية :

$$u_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad , \quad u_y = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$u_{xx} = \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3} = -u_{yy} .$$

إذن نحصل على مرافقها التوافقي بوساطة :

$$v(z) = \int u_x dy - u_y dx = \int \frac{(y^2 - x^2)dy + 2xydx}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \int d\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

لاحظ أن الدالة:

$$f(z) = u + iv = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

تحليلية لقيم $z \neq 0$.

يمدنا التناظر بين الدوال التحليلية والتوافقية بعديد من الخواص المهمة للدوال التوافقية.

مبدأ القيمة العظمى Maximum principle

إذا كانت $u(z)$ توافقية وغير ثابتة في منطقة بسيطة الاتصال G، فإن $u(z)$ ليس لها قيم عظمى أو صغرى في G.

البرهان

بإنشاء دالة المرافق التوافقي $v(z)$ يصبح لدينا $f = u + iv$ دالة تحليلية في G.

بالمثل:

$$F(z) = e^{f(z)} = e^{u+iv}$$

هي دالة تحليلية في G و $|F(z)| = e^{u(z)}$ وبما أن $F(z)$ لا تنعدم في G، وبتطبيق مبدأ القيمة العظمى والصغرى للدوال التحليلية على F، نجد أن e^u ليس لها قيم عظمى أو صغرى في G. وبما أن الدالة الحقيقية e^u هي دالة تزايدية في u، فإن البرهان قد اكتمل.■

نظرية القيمة المتوسطة Mean value theorem

إذا كانت $u(z)$ توافقية في $|z-\zeta| < R$، فإن:

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta + re^{i\theta})\, d\theta, \qquad 0 < r < R.$$

البرهان

كـوّن مرافقـا توافقيـا $v(z)$ لكـي تكـون الدالـة $f = u + iv$ تحليليـة في $|z - \zeta| < R$. تنص نظرية جاوس للقيمة المتوسطة (Gauss's mean value theorem) (انظر البند (٤,٢)) على أن:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta + re^{i\theta})\, d\theta\,, \qquad 0 < r < R.$$

وبأخذ الجزء الحقيقي لكلا الطرفين نحصل على المعادلة المطلوبة.

تمارين (٦,١)

برهن على أن الدوال في التمارين من (١) إلى (٤) توافقية في C:

(١) $\phi(x, y) = e^x \cos y$　　(٢) $\phi(x, y) = \sin x \sinh y$

(٣) $\phi(x, y) = x^3 - 3xy^2$　　(٤) $\phi(x, u) = e^{x^2 - y^2} \sin(2xy)$

حدد ما إذا وجدت دالة تحليلية $f(z) = u + iv$ محققـة للشـروط الموجـودة بالتمارين (٥) إلى (٧). وفي حالة وجودها، بين مجال التعريف:

(٥) $u = \sin x \cosh y$

(٦) $u = \log(x^2 + y^2)$

(٧) $u = e^{y/x}$

أوجد المرافق التوافقي للدوال التوافقية المعطاة بالتمارين من (٨) إلى (١١):

(٨) $u = x^2 \quad y \quad 1)^2$　　(٩) $u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$

(١٠) $u = \tan^{-1} \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$　　(١١) $u = \dfrac{x(x-1) + y^2}{(x-1)^2 + y^2}$

(١٢) إذا كانت u و v دالتين توافقيتين. بيّن أن $au + bv$ هي أيضا توافقية، حيث a و b ثابتان حقيقيان. بيّن أن uv دالة توافقية إذا كان v و u مرافقين توافقيين.

(١٣) بيّن أن $\log|f(z)|$ توافقية متى كانت $f(z)$ تحليلية ولا تساوي الصفر.

(١٤) بيّن أن مبدأ القيمة العظمى يتحقق لمناطق متعددة الترابط (multiple connected).

(١٥) برهن أن $\int_0^{\pi} \log \sin\theta \, d\theta = -\pi \log 2$

(**إرشاد للحل:** طبق نظرية القيمة المتوسطة على $\log|1+z|$ في $|z| \le r < 1$ ، واجعل $r \to 1^-$).

(٦,٢) مسألة "دي رشيليه"

Dirichlet's Problem

إذا درسنا التطبيقات الخاصة بانسياب الموائع ، وسريان الحرارة ، والكهربية الساكنة التي أشرنا إليها في الفصل الخامس. فإننا سنرى أن الحل في كل حالة قد أعطي بدلالة دالة تحليلية تسمى الجهد المركب (complex potential). والجزءان ، الحقيقي والتخيلي للجهد المركب ، لهما معنى فيزيائي مثل خطوط الانسياب (stream lines)، وخطوط القوى ، ودرجات الحرارة المتساوية وما إلى ذلك. ورجوعا إلى البند (٦,١) فإن الجزئين الحقيقي والتخيلي لدالة تحليلية هما دالتان توافقيتان تحققان معادلة لابلاس :

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

إذن تختصر هذه التطبيقات على إيجاد دالة توافقية في منطقة معطاة G وتأخذ قيما معينة مقدما على حدود المنطقة G. وتسمى أي حالة مثل تلك مسألة القيم الحدية (boudary value problem). وأكثر تحديدا يكون لدينا الآتي.

مسألة "دي رشيليه"

إذا أعطينا أي منطقة اختيارية G ، فهل توجد دالة توافقية في G لها القيم المعينة على حدود G.

مثال (٦,٢,١)

أوجد دالة توافقية في الربع الأول ولها قيم حدية، 0 على المحور الحقيقي و100 على المحور التخيلي.

الحـــل

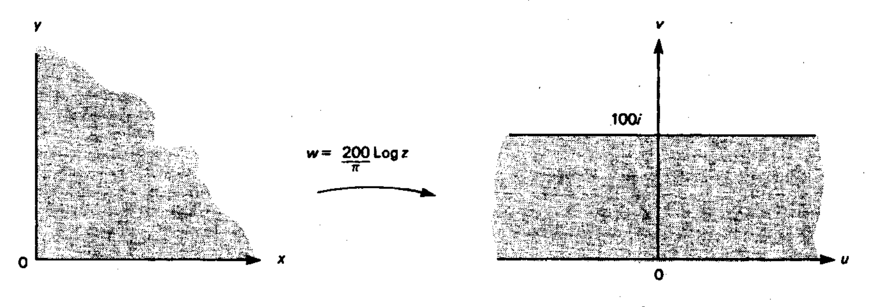
الدالة :
$$w = \frac{200}{\pi} \text{ Log } z$$

تصور الربع الأول تصويرا حافظا للزوايا إلى الشريحة $0 \leq v \leq 100$، حيث $w=u+iv$ [انظر الشكل (٦,١)]. لاحظ أن الجزء الموجب لمحور السينات ينقل إلى الخط $v = 0$ بينما محور الصادات الحقيقي يصبح الخط $v = 100$. وبما أن :

$$u + iv = \frac{200}{\pi} \left(\log |z| + i \text{ Arg } z\right)$$

فإن الدالة :
$$v = \frac{200}{\pi} \text{ Arg } z$$

تكون توافقية في الربع الأول وتحقق الشروط الحدودية المطلوبة.



الشكل رقم (٦.١). تصويرا لحل مسألة "دي رشيليه".

ليس لكل مسائل "دي رشيليه" حلول، ويعتمد وجود الحل على الشكل الهندسي للمنطقة: فيوجد الحل عندما لا يكون هناك أي مركبة من مكملة المنطقة

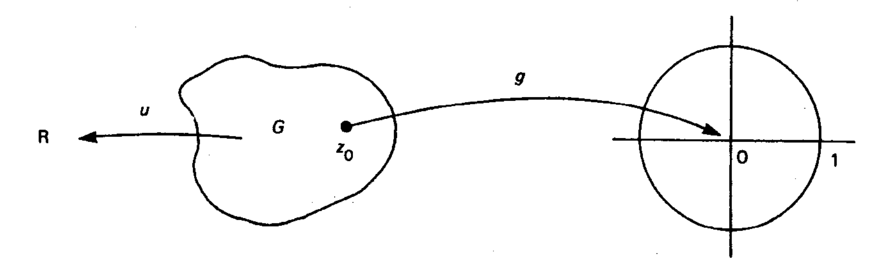
تضغط إلى نقطة، وبرهان هذه الحالة خارج نطاق هذا الكتاب. ويمدنا التمرين (٩) من تمارين (٦,١) بمثال لمنطقة ليس لمسألة دي رشيليه حل لها. ومسألة دي رشيليه لها دائما حل على منطقة بسيطة الاتصال G $(\neq C)$.

ولمعرفة كيفية الحصول على تعبير صريح u للحل عند أي نقطة z_0 في G، نفترض أن g دالة تصور G تصويرا حافظا للزوايا فوق قرص الوحدة $|\zeta|<1$ مع $g(z)=0$ (يتأكد وجود هذه الدالة بوساطة نظرية ريمان للتصوير Remann mapping theorem). وللتبسيط افترض أن g دالة تحليلية في منطقة مفتوحة تحتوي على المنطقة G وحدودها دالة التحصيل $u \circ g^{-1}$ (انظر الشكل (٦,٢)) تكون توافقية على $|\zeta|<1$ ، ولذا وبوساطة نظرية القيمة المتوسطة للدوال التوافقية (انظر الشكل (٦,١)) يمكن أن نمثل $u \circ g^{-1}(0)$ كتكامل لمتوسط القيم $u \circ g^{-1}$ على $|\zeta|=1$ بكتابة:

$$u \circ g^{-1}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \circ g^{-1}(e^{i\theta})\, d\theta$$

بوضع $\zeta = e^{i\theta}$ نحصل على:

$$u \circ g^{-1}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} u \circ g^{-1}(\zeta)\, \frac{d\zeta}{\zeta}$$



الشكل رقم (٦,٢).

وبما أن $\zeta = g(z)$، فإن التكامل يصبح:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} u(z)\frac{g'(z)}{g(z)}dz \qquad (1)$$

وتشير هذه المعادلة إلى أن قيمة أي دالة توافقية u عند نقطة داخلية في المنطقة G ، يمكن أن تحسب على أنها تكامل للقيم الحدودية للدالة u. لاحظ تشابه هذه الحالة مع صيغة كوشي للتكامل.

توضح الأمثلة القادمة استخدام هذا التكامل .

مثال (٢, ٢, ٦)

لحل مسألة دي رشيليه في $G = \{z : |z| < R\}$. لاحظ أن الدالة :

$$g(z) = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}$$

تصور G تصويرا حافظا للزوايا إلى قرص الوحدة المفتوح مع ملاحظة أن $g(z_0) = 0$.
ولقيم $|z| = R$ نحصل على :

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{R^2 - |z_o|^2}{(z - z_0)(R^2 - \bar{z}_0 z)} = \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z|z - z_0|^2} \ ,$$

لكي تصبح المعادلة (1) في الصورة :

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} u(z) \frac{|z|^2 - |z_o|^2}{|z - z_o|^2} \frac{dz}{z} \ .$$

بوضع $z = Re^{i\phi}$ و $z = re^{i\theta}$ نحصل على صيغة بواسون التكاملية للقرص $|z| < R$:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\mathrm{Re}^{i\phi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\phi - \theta)} d\phi \qquad (2)$$

لأن:

$$|z - z_0|^2 = |z|^2 + |z_0|^2 - (\bar{z}_0 z - z_0 \bar{z})$$

$$= R^2 + r^2 \quad Rr\,(e^{i(\phi-\theta)} + e^{-i(\phi-\theta)}).$$

وبما أن $z_0 = re^{i\theta}$ نقطة اختيارية ، فإن المعادلة (2) تتحقق لكل النقاط $|z_0| < R$.

مثال (٦,٢,٣)

إذا كانت G تمثل نصف المستوى الأيمن ، وكانت z_0 أي نقطة داخل G ، فإن الدالة :

$$g(z) = (z \quad z_0) / (z + z_0)$$

تصور G تصويرا حافظا للزوايا إلى قرص الوحدة حيث $g(z_0) = 0$. وبما أن :

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{2z_0}{z^2 - z_0^2} \ ,$$

فإن صيغة "بواسون" التكاملية لنصف المستوى الأيمن هي :

$$u(z_0) = \frac{z_0}{\pi i} \int_{\partial G} \frac{u(z)dz}{z^2 - z_0^2}$$

وبوضع $z = it$ ، نحصل على :

$$u(z_0) = \frac{-z_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(it)dt}{t^2 + z_0^2}$$

في المناقشة التي أدت إلى صيغـــة بواسون التكاملية للقرص $|z_0| < R$ فرضت القيم الحدودية على أنها دوال متصلة. ولكن في تطبيقات كثيرة وكما في المثال (٦,٢,١) لم تكن القيم الحدودية متصلة. ومن المهم أن نلاحظ أن صيغة بواسون التكاملية تعطي دالة توافقية بالرغم من عدم تحقق الاتصال.

نظرية بواسون Poisson's theorem

لتكن $U(\phi)$ دالة متصلة لقيم $0 \le \phi \le 2\pi$ باستثناء عدد محدود من النقـاط. إذن الدالة :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\phi) \frac{R^2 - |z|^2}{|\mathrm{Re}^{i\phi} - z|^2} \, d\phi$$

توافقية في $|z| < R$ ، $\lim_{z \to \mathrm{Re}^{i\phi}} u(z) = U(\phi)$ عند كل نقاط اتصال الدالة $U(\phi)$.

البرهان

لاحظ أن :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{Re^{i\phi}+z}{Re^{i\phi}-z}\right) = \frac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\phi}-z|^2} . \tag{3}$$

ويمكننا بالتعويض بالطرف الأيسر ، للمعادلة (3) في التكامل أن نكرر التفاضلات الجزئية بالنسبة إلى x و y تحت علامة التكامل لأن دالة التكامل الناتجة متصلة على $|z| < t < R$. إذن :

$$\Delta u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\phi)\,\Delta\operatorname{Re}\left(\frac{Re^{i\phi}+z}{Re^{i\phi}-z}\right) d\phi = 0 , \qquad |z| < R ,$$

لأن الجزء الحقيقي من الدالة التحليلية $(Re^{i\phi}+z)/(Re^{i\phi}-z)$ دالة توافقية ، وهكذا تكون $u(z)$ توافقية في $|z| < R$.

لتكن $\zeta = Re^{i\phi}$ ، لاحظ أن :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{Re^{i\phi}+z}{Re^{i\phi}-z}\right) d\phi = Re\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta=R|} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,\frac{d\zeta}{\zeta}\right)$$

$$= Re\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\left(\frac{2}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta\right] = 1 .$$

إذا كانت $U(\phi)$ متصلة عند $\phi=\alpha$ ، فإنه بإعطاء $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إن $|U(\phi)-U(\alpha)| < \varepsilon$ متى كانت $|\phi-\alpha| < \delta$ (افترض أن U لها طور 2π).

وعليه :

$$|u(z)-U(\alpha)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(U(\phi)-U(\alpha)\right)\operatorname{Re}\left(\frac{Re^{i\phi}+z}{Re^{i\phi}-z}\right)d\phi\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mid U(\phi)-U(\alpha) \mid \frac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\phi}-z|^2}\ d\phi$$

$$\leq \varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|\phi-\alpha|\leq\pi} \frac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\phi}-z|^2} \mid U(\phi)-U(\alpha) \mid d\phi$$

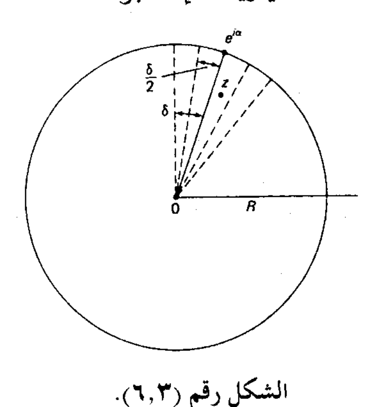
الآن إذا كانت $|\arg z-\alpha| < \delta/2$ و $|\phi-\alpha| \geq \delta$ فإن (انظر شكل (٦,٣)):

$$|Re^{i\phi}-z| \geq R\sin\frac{\delta}{2}\ ,$$

بحيث إن:

$$\mid u(z)-U(\alpha) \mid \leq \varepsilon + \frac{R^2-|z|^2}{2\pi R^2 \sin^2\frac{\delta}{2}}\int_0^{2\pi} \mid U(\phi)-U(\alpha) \mid d\phi \to \varepsilon,$$

عندما $z\to Re^{i\phi}$ ، وبما أن ε اختيارية ، فإن البرهان قد اكتمل. ■



الشكل رقم (٦,٣).

يعتمد المثال التالي على استخدام الدوال حافظة الزوايا مع صيغة بواسون التكاملية لإيجاد حل لمسألة "دي رشيليه".

مثال (٦,٢,٤)

أوجد دالة u توافقية معرفة على قرص الوحدة ولها القيمة الحدودية 1 في نصف المستوى الأيمن، والقيمة 0 في نصف المستوى الأيسر.

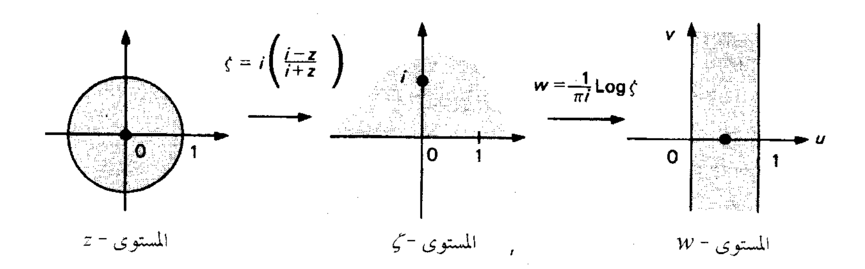
الحـل

التحويل الكسري الخطي :

$$\zeta = i\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$$

يصور النقاط 1، i- ، i و 0 إلى 1-، ∞، 0 و i ، وعليه يصور قرص الوحدة تصويرا حافظا للزوايا إلى نصف المستوى العلوي. وباتباع هذه الدالة بالدالة $w = (1/\pi i)\text{Log}\,\zeta$ يصور نصف المستوى العلوي إلى الشريحة $0 < u < 1$ حيث $w = u + iv$ (انظر شكل (٦,٤) وبالتالي الدالة التوافقية المطلوبة هي :

$$u(z) = \text{Re}\, w = \frac{1}{\pi}\ \text{Arg}\ \zeta \ = \frac{1}{\pi}\ \text{Arg}\left[\ i\left(\frac{i-z}{i+z}\right)\ \right]$$



الشكل رقم (٦,٤).

ولحل مسألة "دي رشيليه" باستخدام صيغة بواسون التكاملية. لاحظ أن :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1-\left|z^2\right|}{\left|e^{i\phi}-z\right|^2}\ d\phi$$

لأن $U(\phi)=0$ في نصف المستوى الأيسر. وبوضع $z=re^{i\theta}$ نجد أن:

$$u(z)=\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d(\phi-\theta)}{1+r^2-2r\cos(\phi-\theta)}$$

$$=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{\phi-\theta}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

ولذلك:

$$\tan \pi u(z)=\frac{\frac{1+r}{1-r}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right]}{1-\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\frac{1-r^2}{2r}\left[\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}+1}{\tan^2\frac{\theta}{2}-1}\right]=\frac{1-r^2}{-2r\cos\theta}$$

للتأكد من أن هذه الأجوبة متكافئة ، لاحظ أن

$$\operatorname{Arg}\left[\ i\left(\frac{i-z}{i+z}\right)\ \right]=\operatorname{Arg}\left[\frac{-(z+\bar{z})+i(1-|z|^2)}{|i+z|^2}\right]$$

وباستخدام المتطابقة $\operatorname{Arg}(x+iy)=\tan^{-1}(y/x)$. ، في نصف المستوى الأيمن نجد أن:

$$\operatorname{Arg}\left[\ i\left(\frac{i-z}{i+z}\right)\ \right]=\tan^{-1}\left[\frac{1-|z|^2}{-(z+\bar{z})}\right]=\tan^{-1}\left(\ \frac{1-r^2}{-2r\cos\theta}\ \right).$$

تمارين (٦,٢)

(١) لتكن $u(z)$ توافقية في $|z-\zeta|<R$. برهن نظرية القيمة المتوسطة للمساحة (area mean value theorem):

$$u(\zeta) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{|z-\zeta|<R} u(z) dr d\theta$$

(**إرشاد للحل**: استخدم نظرية القيمة المتوسطة للدوال التوافقية).

(٢) استخدم نظرية القيمة المتوسطة للمساحة لإثبات مبدأ القيمة العظمى للدوال التوافقية.

(٣) إذا كانت u دالة توافقية في منطقة بسيطة الاتصال، بين أن $\text{grad } u$ تحليلية. ثم استخدم التطوير في البند (٥,٥) للبرهان على أن:

$$\int_{\gamma} u_n \, ds = 0$$

حيث γ أي منحنى مغلق أملس قطعيا في G و u_n المشتقة المتجهة عموديا نحو الخارج للدالة u.

(٤) بيّن أن صيغة بواسون لنصف المستوى العلوي $y>0$ هي:

$$u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)dt}{(t-x)^2 + y^2}, \qquad z = x + iy$$

(٥) بيّن أن صيغة بواسون التكاملية للربع الأول من المستوى هي:

$$u(z) = \frac{4xy}{\pi} + \left[\int_0^{\infty} \frac{tu(t)dt}{t^4 + 2t^2(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)^2} \right]$$

(٦) أوجد درجة الحرارة عند أي نقطة z في نصف المستوى العلوي إذا كانت درجة الحرارة (بالدرجات) على المحور الحقيقي تعطى بوساطة:

$$u(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \le 1, \\ 0, & |t| \ge 1, \end{cases}$$

(٧) برهن على أن أي دالة تحل مسألة "دي رشيليه" والمتصلة على المنطقة ومحيطها (closure) لمنطقة بسيطة الاتصال G يجب أن تكون وحيدة.

(**إرشاد للحل**: استخدم مبدأ القيمة العظمى).

(٨) افترض أن $u(z)$ و $v(z)$ دالتان توافقيتان على المنطقة G، ومتصلتان على المنطقة وحدودها وتحقق $u(z) < v(z)$ على محيط G. بيّن أن $u(z) \leq v(z)$ لكل $z \in G$.

(٩) إذا كانت G هي المنطقة $1 > |z| > 0$. بيّن أنه لا توجد دالة توافقية $u(z)$ في G ولها القيمتان الحدوديتان $u(e^{i\theta}) = 0$ و $u(0) = a > 0$.

(**إرشاد للحل**: طبق التمرين (٨) للدوال, $u_r(z) = a\dfrac{\log|z|}{\log r}$ التوافقية في $r < |z| < 1$).

(١٠) برهن متباينة هارنك (Harnack's inequality): إذا كانت $u(z)$ توافقية وغير سالبة في $R > |z|$، فإن:

$$u(0)\frac{R-|z|}{R+|z|} \leq u(z) \leq u(0)\frac{R+|z|}{R-|z|}$$

(١١) إذا كانت $f(z) = u(z) + iv(z)$ تحليلية في منطقة تحتوي على $|z| \leq R$، برهن صيغة شفارتز:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\phi}+z}{Re^{i\phi}-z}\, u(Re^{i\phi})\, d\phi + iv(0),$$

(١٢) بيّن أن صيغة شفارتز يمكن أن تعاد كتابتها في الصورة:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta|=R} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \overline{f(0)}.$$

(**إرشاد للحل**: طبق نظرية القيمة المتوسطة على $u(0) = iv(0) + \overline{f(0)}$)

(١٣) لتكن $U(\phi)$ متصلة على $0 \leq \phi \leq 2\pi$ عند عدد محدود من النقاط، برهن على أن:

$$g(z) = \frac{z}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{U(\phi)}{Re^{i\phi}-z}\, d\phi$$

دالة تحليلية في $|z| < R$.

(**إرشاد للحل**: أعد كتابة صيغة شفارتز).

(١٤) بين باستخدام الطريقة الموجودة بنظرية بواسون أن :

$$u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{(t-x)^2 + y^2}\, dt \quad , \qquad z = x + iy,$$

دالــة توافقية على نصف المستوى العلوي حتى إذا كانت $u(t)$ غير متصلة عند عدد محدود لقيم t.

(١٥) استخدم التمرين (١٤) لإيجاد دالـة $u(z)$ توافقية في نصـف المسـتوى العلـوي ، وتحقق القيم الحدودية التالية :

$$u(t) = \begin{cases} 1 \quad , & |t| < 1, \\ 0 \quad , & |t| \geq 1, \end{cases}$$

(١٦) كرر التمرين (١٥) للقيم الحدودية التالية :

$$u(t) = \begin{cases} 1 \quad , & -1 \leq t \leq 0 \\ 1 - t \quad , & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \quad , & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

(٣ ,٦) تطبيقات

Applications

درسنا في البندين (٥,٥) و(٥,٧) ثلاثة أمثلة متشابهة تحـدث في الطبيعـة لمجـالات اتجاهية في حالة اتزان منها : انسياب الموائع ، وسريان الحرارة ، ومجال الكهربية الساكنة. واختيرت الحقـول الاتجاهيـة - التي فرضـت بأنـها ذات بعديـن وغـير دورانيـة ــ داخـل منطقة G لا تحتوي على منابع أو مصاب. نعالج في هذا البند هذه المسـائل لتحتـوي علـى

منابع ودوامات في المنطقة G. وسوف تتطور النظرية الخاصة بانسياب الموائع ، ومثيلاتها للمتجهين الآخرين. وسوف تقدم في الجدول (٦,١) بنهاية هذا البند.

ونعود للقول بأن متجهة السرعة $V(z)$ للحقل يساوي $\overline{w'(z)}$ والدالة التحليلية $w(z)$ هي الجهد المركب للانسياب . هكذا تكون دالة الجهد u ودالة الميل v ، دالتين توافقيتين مترافقتين. وتختزل مسألة إيجاد خطوط الانسياب إلى مسألة "دي رشيليه". لاحظ مبدأ القيمة العظمى ، أي "إذا كانت خطوط تساوي الجهد تكون منحنيا مغلقا γ ، فإن γ تحوي نقاطا شاذة للدالة $u(z)$ حيث $u(z)$ دالة ثابتة في G. بالطبع لا توجد خطوط انسياب مغلقة ، لأن الانسياب ليس بدوراني. زد على ذلك أن "خطوط الانسياب ، أو خطوط تساوي الجهد لا تبدأ أو تنتهي عند نقطة داخلية z_0 للمنطقة G" ، وإلا وقع قرص صغير جدا مركزه عند z في G وحدوده تقابل خطوط الانسياب $v(z)=k$ عند نقطة واحدة ليس إلا ، وباستخدام الاتصال ، تحقق النقاط الحدودية المتبقية أمرين : إما $v(z)>k$ أو $v(z)<k$ متنحين عن نظرية القيمة المتوسطة. وعليه يمكن لخطوط الانسياب المختلفة أن تقابل فقط النقط المحيطة للمنطقة G (على سبيل المثال ، عند المنابع) أو عند اللانهاية. ونوضح ذلك بمسألة في الانسياب الحراري.

مثال (٦,٣,١)

لتكن الرقيقة G قرصا نصف قطره R ، وله درجات حرارة حدية 1° في نصف المستوى الأعلى ، 0° في نصف المستوى الأدنى ، أوجد درجة الحرارة عند كل نقاط G. وصف خطوط الحرارة (isothermals).

الحــل

بتطبيق صيغة "بواسون" التكاملية نحصل لقيم $z=re^{i\theta}$ ، $r<R$ ، على :

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{Re^{i\phi}+z}{Re^{i\phi}-z}\right)d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\phi - \theta)} d(\phi - \theta)$$

$$= \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{R+r}{R-r} \tan \frac{\phi - \theta}{2} \right) \Bigg|_0^{\pi}$$

وعليه:

$$\tan \pi u(z) = \frac{\frac{R+r}{R-r}\left(\tan \frac{\pi - \theta}{2} + \tan \frac{\theta}{2}\right)}{1 - \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2 \tan \frac{\pi - \theta}{2} \tan \frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{R^2 - r^2}{-2Rr\sin\theta} \ .$$

وبما أن $\tan^{-1} y/x = \text{Arg}\,(x + iy)$ فإن:

$$\pi u(z) = \text{Arg} \ \{ i \, [R^2 - |z|^2 + R(z - \bar{z})]\}$$

$$= \text{Arg} \left[i\left(\frac{R+z}{R-z}\right)\right] ,$$

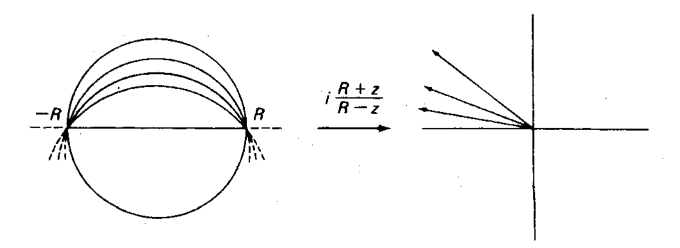
وعليه تعطى درجة الحرارة بوساطة الصيغة التالية:

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \ \text{Arg} \ i \ \frac{R+z}{R-z}$$

وتحقق خطوط ثبوت درجة الحرارة الآتي:

$$\text{Arg} \ i \ \frac{R+z}{R-z} = \text{constant (ثابت)}$$

والدالـة $i \ (R + z)/(R - z)$ تصور $|z| < R$. إلى نصف المستوى العلوي، ولذا فإن خطوط ثبوت الحرارة تقابل الأقواس من عائلة الدوائر المارة بالنقاط $\pm R$ الموجودة في $|z| < R$ (انظر الشكل رقم (٦,٥)).



الشكل رقم (٦,٥). عائلة من الدوائر المارة خلال $\pm R$.

افترض أن منبعا (أو مصبا) وضع عند نقطة الأصل، عندها يكون الانسياب Q عبر منحنى جوردان حول نقطة الأصل ثابتا غير الصفر، وإذا كانت γ هي الدائرة $|z| = r$، فإن مركبة السرعة الرأسية V_n تكون ثابتة في كل اتجاه، كما أن خطوط الانسياب تكون قطرية عند نقطة الأصل.

وعليه فإن:

$$Q = \int V_n \, ds = V_n \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi V_n$$

و:

$$V(z) = V_n \cdot \frac{z}{|z|} = \frac{Q}{2\pi} \frac{z}{|z|^2} ,$$

لأن $z / |z|$ هو متجه الوحدة العمودي. وبما أن $v(z) = \overline{w'(z)}$ ، فإن:

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \log(z) + c , \quad (\text{c عدد مركب})$$

إذن تعطى دالتي الجهد والانسياب بوساطة المعادلتين:

$$u(z) = \frac{Q}{2\pi} \log |z| \quad , \quad v(z) = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{agr} z ,$$

على التوالي مع احتمال وجود ثابت حقيقي اختياري. لاحظ أن $v(z)$ دالة متعددة القيم، وكلا الدالتين توافقيتان في أي منطقة بسيطة الاتصال لا تحتوي على نقطة

الأصل. إذا كانت $Q > 0$ فإننا نحصل على منبع له القوة Q عند $z = 0$، وإذا كانت $Q < 0$، فإننا نحصل على مصب، وإذا كان المنبع ليس عند نقطة الأصل، ولكن عند النقطة z_0، فإن الجهد المركب يساوي:

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \log(z \quad z_0) + \text{ c}, \tag{1}$$

ومن جهة أخرى، ربما يكون الحقل الاتجاهي غير دوراني. وربما يحدث هذا على سبيل المثال، من تأثير إعصار أسطواني لكي تكوّن خطوط الانسياب دوائر متمركزة على الإعصار (rotor) الدائر في أي مستوى عمودي عل محوره ويسمى مثل هذا المجال دواميا مستويا (plane vortex field).

إذا تمركزت الدوامة (point vortex) عند نقطة الأصل، إن الدوران Γ (circulation) حول منحنى جوردان γ يكون ثابتا وغير صفري ($\Gamma > 0$ عندما يكون السريان ضد عقارب الساعة)، وحول الدائرة $|z| = r$ تكون مركبة السرعة المماسية V_s ثابتة، ولذا فإن:

$$V(z) = V_s \;.\; \frac{iz}{|z|} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \;\frac{z}{|z|^2} \;,$$

لأن $iz / |z|$ هو متجه الوحدة للمماس. وعليه، وما عدا لثابت اختياري، فإن:

$$w(z) = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \log z = \frac{\Gamma}{2\pi} \arg z + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{1}{|z|} \,. \tag{2}$$

هي الجهد المركب لهذا الحقل. وبما أن المنبع عند نقطة يمكن أن يكون دوامة، فإننا نربط المعادلتين (1) و(2) (عند z_0) لنحصل على:

$$w(z) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \log(z - z_0) + \text{c}. \tag{3}$$

كجهد مركب لمنبع دوامة متمركزة عند z_0 بكثافة Γ وقوة Q. ونحصل على الجهد المركب لنظام المنابع الدوامية $\Gamma_1 + iQ_1, \ldots. \Gamma_k + iQ_k$ متمركزة عند $z_1, \ldots., z_k$ بإضافة الجهود المركبة المنفصلة.

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{k} \left(\Gamma_j + iQ_j\right) \log(z - z_j) \qquad (4)$$

مثل ما نحصل على الحقل الاتجاهي بوساطة التحصيل (superposition). زد على ذلك فإن هذه النتيجة وخطوات النهاية المعتادة، يمكن أن تستخدم للحصول على الجهد المركب لخط L من المنابع، بشرط أن تكون دالة الانسياب $Q(\zeta)$ تكاملية:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L Q(\zeta) \log(z - \zeta) ds, \zeta \in L \qquad (5)$$

مثال (٦,٣,٢)

إذا تألف النظام من منبعين، لكل منهما القوة Q، ووضعنا عند z_1 و z_2 فإن الجهد المركب يعطى بوساطة الصيغة:

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \log(z \quad z_1)(z \quad z_2).$$

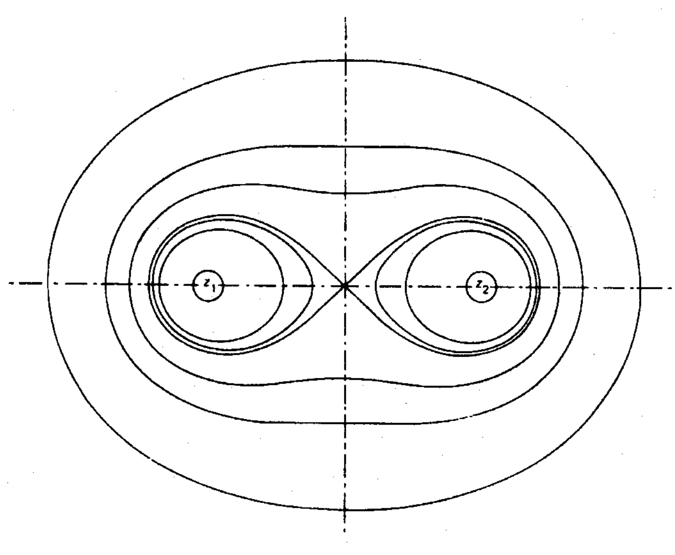
وتحقق خطوط تساوي الجهد المساواة:

$$| z - z_1 | \, | z - z_2 | = \text{constant},$$

وتعرّف على أنها عيون القطط (lemniscates) ووضحت بالشكل (٦,٦). تعطي عيون القطط، التي لها الشكل ∞، بوساطة المعادلة:

$$| z - z_1 | \, | z - z_2 | = \frac{|z_1 - z_2|^2}{4},$$

لاحظ أن $(z_1 + z_2)/2$ هي نقطة ركود.



الشكل (٦,٦). عيون القطط.

مثال (٣, ٣, ٦)

نظام يتألف من منبع ومصب لهما القوتان Q و$-Q$ ومتمركزان عند z_1 و z_2 على الترتيب ولهذا النظام جهد مركب يعطى بوساطة المعادلة :

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \log \left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right|$$

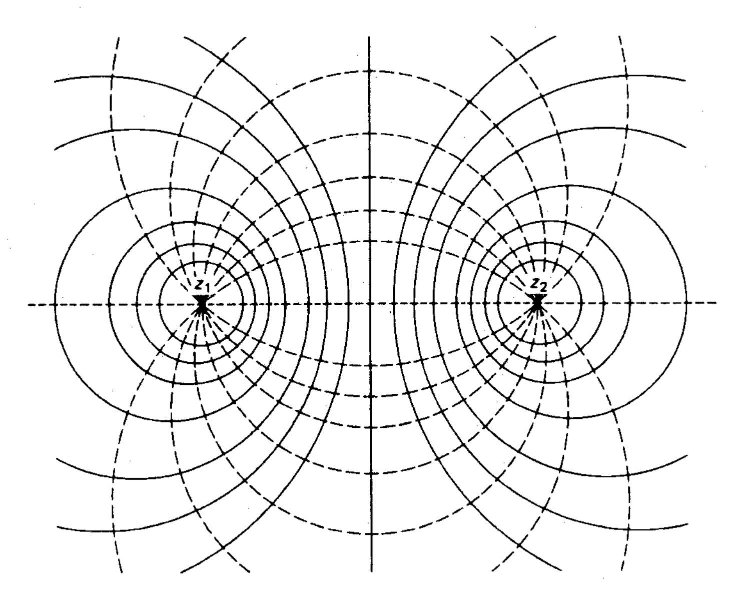
وتحقق خطوط تساوي الجهد أن :

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \text{constant}$$

وتكون ما يعرف بدوائر أبولونيوس (Apollonius) المبينة على أنها خطوط مصمتة (solid lines) في شكل (٦,٧). وخطوط الانسياب هي عائلة الدوائر التي تمر بالنقطتين z_1 و z_2 .

لتكن $z_1 = -h$,$z_2 = 0$. إذن :

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \log \frac{z+h}{z} = \frac{p}{2\pi} \log \left(1+\frac{h}{z}\right)^{1/h}, \quad p = Qh \quad .$$



الشكل رقم (٦,٧). دوائر أبولونيوس.

وإذا سمحنا الآن للمنبع أن يقترب مـن المصب ، فـإن Q تـتزايد في نفـس الوقـت لكي تبقى p ثابتة ، ونحصل في النهاية على نقطة مزدوجة (point doublet). ذات عـزم p عنـد 0. وخطـوط الانسياب متجهـة إلى امتـداد المحـور الحقيقـي الموجـب. ويعطـى الجـهد المركب للانسياب بوساطة :

$$w(z) = \frac{p}{2\pi} \lim_{h\to 0} \log \left(1+\frac{h}{z}\right)^{1/h} = \frac{p}{2\pi} \log e^{1/z} = \frac{p}{2\pi z}, \qquad (6)$$

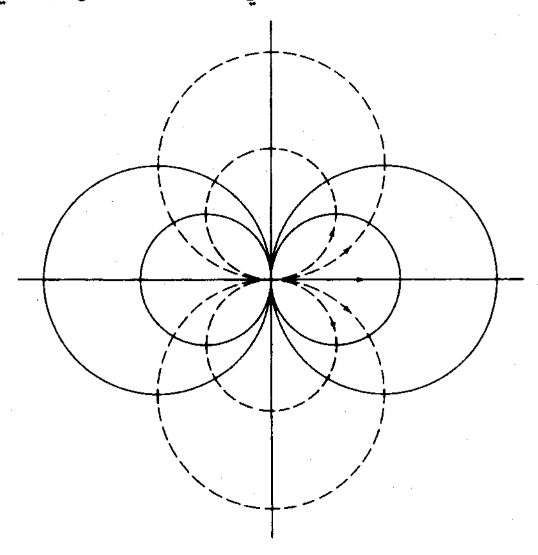
وعليـه :

$$u = \frac{p}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} \quad , \quad v = \frac{-p}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2}$$

إذن :

$$\left(x-\frac{p}{4\pi u}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{p}{4\pi u}\right)^2 \quad , \quad x^2+\left(y+\frac{p}{4\pi v}\right)^2=\left(\frac{p}{4\pi v}\right)^2 \quad ,$$

وخطوط تساوي الجهد وخطوط الانسياب هي عائلات الدوائر المبينة في الشكل (٦,٨).



الشكل رقم (٦,٨). نقطة مزدوجة (قطبين) عند نقطة الأصل.

تتحقق الخطوات السابقة أيضا لقيم z_0 المركبة، ولكن عزم الازدواج الآن هو عدد مركب له الزاوية $(\pi + \arg z_1)$ وينطبق مع اتجاه خطوط الانسياب عند نقطة الأصل.

مثال (٦,٣,٤)

نعتبر مسألة الانسياب الكامل للمنطقة الواقعة خارج قرص الوحدة، لكي يؤول متجه السرعة إلى 1 عند ∞.

وكما هو مبين بمثال (٥,٥,٣)، البند (٥,٥)، إذا كان الانسياب متماثلا مع محور السينات، فإن الجهد المركب يعطى بوساطة:

$$w_1(z) = z + \frac{1}{z} \quad ,$$

لأن $V_1(z) = 1 - (1/\bar{z}^2)$ وبإسقاط فرض التماثل، لاحظ أن الانسياب ربما يتعرض إلى حالة انسياب دوامي متمركز عند نقطة الأصل وله الشدة Γ، وجهده المركب:

$$w_2(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z \quad ,$$

لأن متجه سرعته المناظر:

$$V_2(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi \bar{z}} \quad ,$$

ينعدم عند ∞، وبوساطة التراكب (superposition)، تعطى معادلة الجهد بوساطة المعادلة:

$$w(z) = z + \frac{1}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z \ ,$$

ومقدار السرعة الذي يحقق المعادلة:

$$\left| \overline{V(z)} \right| = \left| w'(z) \right| = \left| 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i z} \right| \ ,$$

ينعدم عند الأصفار z_0 (نقاط الركود) للمعادلة:

$$z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i} z - 1 = 0 \ ,$$

أي أن:

$$z_s = \frac{\Gamma i \pm \sqrt{16\pi^2 - \Gamma^2}}{4\pi} \ . \tag{7}$$

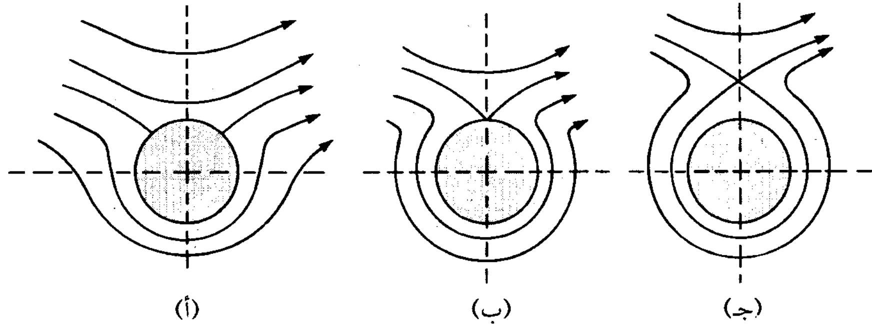
وإذا كانت $|\Gamma|<4\pi$ ، فإن $|z_s| = \sqrt{\Gamma^2 + 16\pi^2 - \Gamma^2}/4\pi = 1$ ، وبالتالي فإن :

$$\tan \operatorname{Arg} z_s = \frac{\pm\Gamma}{\sqrt{16\pi^2 - \Gamma^2}} \ ,$$

وإذا كانت $|\Gamma| > 4\pi$ ، فإن نقاط الركود تقع على المحور التخيلي وتحقق المساواة :

$$|z_s| = \frac{\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 16\pi^2}}{4\pi}$$

وعليه توجد نقطة ركود واحدة خارج الدائرة . وقد وضعت خطوط الانسياب في الشكل (٦,٩).

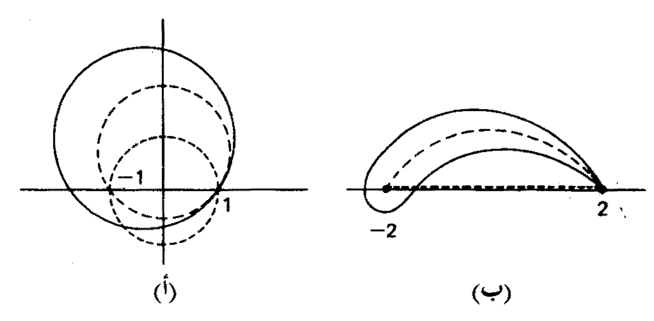


الشكل رقم (٦,٩). الانسياب الكامل لخارج قرص مع نقطة دوامة عند مركزها

(أ) $0 < \Gamma < 4\pi$ ، (ب) $\Gamma = 4\pi$ و (جـ) $\Gamma > 4\pi$

لانسياب منطقة G بأكملها ، نحتاج إلى دالة حافظة للزوايا ليس إلا لتنقل G إلى خارج قرص الوحدة ، $f : G \to \{\,|z| > 1\,\}$ ، إذن دالة التحصيل wof هي الجهد المركب للمنطقة G. وكأهمية خاصة لميكانيكا الطيران (areodynamics) نجد الانسياب الكامل (complete streaming) لشكل جوكوفكسي (Joukowsky) المعطى بالدالة $z = \zeta + \frac{1}{\zeta}$ الذي يصور الدوائر المعطاة كما هو مبين بالشكل (٦,١٠). ويمكن للشكل

أن يوضع ليقارب القطاعات من الشكل الهوائي(airfoils)، والارتفاع (lift) للشكل الهوائي (airfoil) يمكن حينئذ أن يقدر.



الشكل رقم (٦,١٠). منظر جوكوفيكسي (أ) المستوى-ζ و(ب) المستوى-z

ويمكننا الآن أن نضم المعلومات من هذا البند إلى مقارنتنا بين انسياب الموائع، سريان الحرارة، والكهربية الساكنة (انظر الجدول (٦,١)).

الجدول رقم (٦,١). المجالات الاتجاهية لحالة الاتزان.

انسياب الموائع	سريان الحرارة	مجال الكهربية الساكنة
$w(z) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \log(z - z_0)$ منبع دوامي له القوة Q والشدة Γ عند z_0	$w(z) = \frac{Q}{2\pi k} \log \frac{1}{z - z_0}$ منبع دوامي له القوة Q عند z_0	$iw(z) = \frac{Q}{2\pi}\, i \log \frac{1}{z - z_0}$ شحنة لها القيم $Q/2\pi$ عند z_0
$w(z) = \frac{p}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}$ ازدواج له عزم p عند z_0	$w(z) = \frac{-p}{2\pi k} \frac{1}{z - z_0}$ ازدواج له عزم pعند z_0	$iw(z) = \frac{-ip}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}$ زوج من الأقطاب المشتركة له العزم $p/2\pi$ عند z_0

تمارين (٦,٣)

(١) أوجد دالة الجهد لحقل مستو لكهربية ساكنة لمستوى في $1 > |z|$ المحدد بوساطة أقطاب كهربية تمثل بوساطة نصفي الدائرتين $e^{i\theta}$ و $|\theta| < \pi/2$ و $e^{i\theta}$ و $|\theta - \pi| < \pi/2$ ، ذات الجهدين u_0 و u_1 على التوالي.

(٢) أوجد درجة الحرارة لرقيقة Q على شكل نصف المستوى العلوي إذا أعطيت درجات الحرارة الحدودية بحيث تكون 100° على $1 < |x|$ و 0° على $1 > |x|$.

(٣) أوجد الجهد المركب وخطوط الانسياب لسريان مستوى لمائع في نصف المستوى العلوي عندما يوجد منبع له القوة Q عند 1 ومصب له نفس القوة عند 0.

(٤) ما الجهد المركب لانسياب مستوى لمائع له مصب قوته Q عند 1- ومنبع دوامي قوته Q وشدته Γ عند 0؟

في التمارين من (٥) إلى (٨) أعطينا الجهد المركب لانسياب مائع ، كوّن خطوط تساوي الجهد و خطوط الانسياب ، وأوجد قيمة السرعة V ونقط الركود ، والشدة ، والقوة للمنابع الدوّامية ، والعزم للازدواجيات وسلوك السريان عند ∞.

(٥)
$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \log\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

(٦)
$$w(z) = \log\left(1 + \frac{4}{z^2}\right)$$

(٧)
$$w(z) = \log\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right)$$

(٨)
$$w(z) = az + \frac{Q}{2\pi} \log\left(\frac{1}{z}\right) \quad , \quad a \; , \; Q > 0$$

(٩) النقطة متعددة الأقطاب (multipole) تعميم لثنائي القطب (dipole)، نحصل عليها بأخذ مصب له القوة Q عند نقطة الأصل مع n من المنابع ذات القوة Q/n موزعة بالتماثل على دائرة نصف قطرها r، وباعتبار Qr ثابتا عندما تؤول r إلى الصفر، بيّن أن جهدها المركب يعطى بوساطة العلاقة :

$$w(z) = \frac{-p}{2\pi n}\left(\frac{1}{z^n}\right), \qquad |p| = Qr$$

ووجهت خطوط الانسياب على امتداد الزوايا للجذور النونية للنقطة P ، مثل هذه النقطة متعددة الأقطاب يقال إن لها الرتبة $2n$.

ارسم صور الدوائر الموصوفة في التمرينين (١٠) و(١١) تحت تأثير الدالة :

$$z = \zeta + (1/\zeta)$$

(**إرشاد للحل**: بين أن : $\dfrac{z-2}{z+2} = \left(\dfrac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)^2$).

(١٠) $|\zeta - i| = \sqrt{2}$

(١١) $|\zeta + 1 - i| = \sqrt{5}$

(٦,٤) متسلسلة فورير

Fourier Series

ترتبط صيغة بواسون التكاملية ارتباطا ملحوظا بمفهوم متسلسلة فورير. ولقد رأينا أنه إذا كانت $U(\phi)$ دالة متصلة عند كل النقاط $0 \le \phi \le 2$ فإن الدالة :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\phi)\,\text{Re}\left(\frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z}\right) d\phi$$

دالة توافقية في $|z| < R$ ولها قيم حدودية $u(\text{Re}^{i\phi}) = U(\phi)$ عند كل نقاط الاتصال للدالة U. ومن الناحية العملية، فغالبا ما يكون سهلا أن نحصل على $u(z)$ بفك الطرف الأيمن من المعادلة السابقة إلى متسلسلة لانهائية. إذن :

$$u(z) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\phi)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{Re^{i\phi}}\right)^n\right]d\phi\right],$$

ولأن المتسلسلة تتقارب بانتظام في $|z| \le \rho < R$ فإنه يمكن أن نكامل حدودها حدا بحد حتى نحصل على متسلسلة فورير:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\phi)d\phi + 2\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\phi)\ e^{-in\phi}d\phi\right)\left(\frac{z}{R}\right)^n$$

$$= c_0 + 2\operatorname{Re}\left[\sum_{n=1}^{\infty} r^n c_n e^{in\theta}\right], \quad z = re^{i\theta}, \tag{1}$$

حيث:

$$R^n\ c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\phi)\ e^{-in\phi}\ d\phi \tag{2}$$

هو المعامل النوني لفورير للدالة $U(\phi)$.

مثال (٦,٤,١)

أوجد الدالة التوافقية للقرص $|z| < R$ التي لها القيم الحدودية $U(\phi) = \cos\phi$ عندما تكون $0 \le \phi \le 2\pi$.

الحـــل

أولا نحسب معاملات فورير للدالة $U(\phi)$:

$$2\pi\ R^n\ c_n = \int_0^{2\pi} \cos\phi e^{-in\phi}\ d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i(n-1)\phi} + e^{-i(n+1)\phi}}{2}\ d\phi$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-1}{2i}\left[\dfrac{e^{-i(n-1)\phi}}{n-1}+\dfrac{e^{-i(n+1)\phi}}{n+1}\right]_0^{2\pi} = 0, & n \neq 1, \\ \dfrac{1}{2}\left[\phi - \dfrac{e^{-2i\phi}}{2i}\right]_0^{2\pi} = \pi, & n = 1, \end{cases}$$

وعليه :

$$u(z) = z\text{Re}\,(rc_1 e^{i\theta}) = \text{Re}\,(z/R)\,.$$

مثال (٢,٤,٦)

حفظ لوح على شكل قرص دائري نصف قطره Rعند درجة حرارة ثابتة 100°C على امتداد نصف المستوى الأعلى لمحيط القرص وعند 0°C على امتداد النصف الأدنى. أوجد درجة الحرارة عند أي نقطة z للوح.

الحـــل

هنا $U(\phi) = 100$ لكل $0 \le \phi \le \pi$ و $U(\phi) = 0$ لكل $\pi \le \phi \le 2\pi$ ، لذا تحقق معاملات فورير أن $c_0 = 50^\circ$ و :

$$2\pi\, R^n\, c_n = 100 \int_0^{2\pi} e^{-in\phi}\, d\phi = \frac{100}{in}\left[1 - e^{-in\pi}\right], \qquad n > 0$$

وعليه :

$$u(z) = 50 + 2\,\text{Re}\left[\sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\theta})^{2n+1}\, c_{2n+1}\right]$$

$$= 50 + \frac{200}{\pi}\,\text{Re}\left[\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z/R)^{2n+1}}{2n+1}\right]$$

وباستخدام الطريقة الموجودة بالمثال (٣,٢,١) بالبند (٣,٢)، فإننا نجد أن :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^z \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2}\,\text{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

إذن :

$$u(z) = 50 + \frac{200}{\pi} \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2i}\operatorname{Log}\left(\frac{R+z}{R-z}\right)\right]$$

$$= 50 + \frac{100}{\pi} \operatorname{Arg}\left(\frac{R+z}{R-z}\right)$$

$$= \frac{100}{\pi} \operatorname{Arg}\left[i\left(\frac{R+z}{R-z}\right)\right]$$

ويوجد ارتباط مشابه بين متسلسلة "فورير" ومتسلسلة "لورانت" لدالة تحليلية $f(z)$ في الحلقة $r_2 > |z| > r_1$. هنا :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \ , \tag{3}$$

حيث :

$$R^n c_n = \frac{R^n}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mathrm{Re}^{i\phi}) e^{-in\phi} d\phi, \quad r_1 < R < r_2$$

لاحظ أن :

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=-k}^{k} r^n c_n e^{-in\phi} \right|^2 d\phi = \int_0^{2\pi} \sum_{n=-k}^{k} \sum_{m=-k}^{k} r^{n+m} c_n c_m e^{-i(n-m)\phi}\, d\phi$$

$$= 2\pi \sum_{n=-k}^{k} r^{2n} \left| c_n \right|^2 ,$$

لأن :

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(n-m)\phi}\, d\phi = \left.\frac{e^{-i(n-m)\phi}}{i(n-m)}\right|_0^{2\pi} = 0 , \qquad m \neq n$$

بما أن تمثيل متسلسلة "لورانت " يتقارب بانتظام في $r_1 < \rho_1 \le |z| \le \rho_2 < r_2$ فيمكن أن نبادل بين عمليتي النهاية والتكامل حاصلين على متطابقة بارسافيل (Parseval's identity).

$$\int_0^{2\pi} \left| f(r\, e^{i\phi}) \right|^2 d\phi = \lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=-k}^{k} r^n\, c_n\, e^{in\phi} \right|^2 d\phi$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{2n} \left| c_n \right|^2 ,$$

إذا كانت $z = e^{i\phi}$، فإن المتسلسلة في المعادلتين (1) و(3) يمكن أن يكتب كل منهما على الصورة:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\phi} \qquad (4)$$

بجعل $c_{-n} = \bar{c}_n$، لأن $2\mathrm{Re}\,(c_n\, e^{i\phi}) = c_n\, e^{i\phi} + \bar{c}_n\, e^{-i\phi}$

مثال (٣,٤,٦)

إذا كانت $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ دالة تحليلية وأحادية في منطقة تحتوي الحلقة $r \le |z| \le R$ بيّن أن المساحة لصورة الحلقة هي:

$$\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \left| c_n \right|^2 (R^{2n} \quad r^{2n}) .$$

الحـــل

وجد في التمرين (١١) من البند (٥,١) أن التغير المكاني لمقياس المساحات الناتج بوساطة الدالة $f(z)$ هو $|f'(z)|^2$. إذن المساحة لصورة الحلقة هي:

$$\iint_{r\le|z|\le R} |f'(z)|^2\, dx\, dy = \int_r^R \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\phi})|^2\, r d\phi\, dr .$$

وباستخدام الطريقة المستخدمة في برهان متطابقة "بارسافيل"، نحصل على:

$$\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\phi})|^2\, d\phi = \lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} \left|\sum_{n=-k}^{k} nc_n z^{n-1}\right|^2 d\phi$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \mid c_n \mid^2 r^{2(n-1)} .$$

إذن، وبما أن التقارب منتظم فإن:

$$\iint_{r\le|z|\le R} |f'(z)|^2\, dx\, dy = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \mid c_n \mid^2 \int_r^R r^{2n-1}\, dr$$

$$= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \mid c_n \mid^2 (R^{2n} - r^{2n})$$

ليس من الضروري أن تتقارب متسلسلة فورير المعطاة بالمعادلة (1) إلى $U(\phi)$. اعتبر على سبيل المثال، دالة $U_1(\phi)$ مختلفة عن $U(\phi)$ عند نقطة واحدة لا غير، ولكلتا الدالتين نفس متسلسلة فورير، ولكن لا يمكن تمثيلهما عند كل نقطة وتوجد الدوال المتصلة التي لها متسلسلات فورير متباعدة عند كل الأعداد الكسرية ϕ في الفترة $[0,2\pi]$ ومسألة التقارب ذات أهمية أساسية لدراسة متسلسلات فورير.

وقبل دراسة مسألة التقارب، من المفيد أن نعرف النهايات من جهة واحدة، وكذلك التفاضلات. فلكل $\varepsilon > 0$، النهايتان:

$$U(\phi+0) = \lim_{\varepsilon\to 0} U(\phi+\varepsilon) \qquad , \quad U(\phi-0) = \lim_{\varepsilon\to 0} U(\phi-\varepsilon)$$

هما النهايتان اليمنى واليسرى، و:

$$U'(\phi+0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{U(\phi+\varepsilon)-U(\phi+0)}{\varepsilon}$$

$$U'(\phi-0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{U(\phi-\varepsilon)-U(\phi-0)}{-\varepsilon}$$

هما المشتقات اليمنى واليسرى على الترتيب للدالة U عند ϕ. لاحظ أن U دالـة متصلـة عند ϕ، وتتطابق كلتا النهايتين من جهة واحدة مع $U(\phi)$، وإذا كانت U تفاضلية عند ϕ فإن المشتقتين من جهة واحدة تتفقان مع $U'(\phi)$.

يقال لدالة حقيقيـة $U(\phi)$ إنـها ملسـاء جزئيا (piecewise smooth (pws)) علـى $[a\,,b]$ إذا كان لـها مشتقة متصلة عند كل النقاط مـاعدا عنـد عـدد محـدود مـن النقـاط، حيث تكون النهايات التي من جهة واحدة والمشتقات للدالة U موجودة.

تحل النظرية التالية، مسألة التقارب لمجموعة مفيدة من الدوال.

نظرية

لتكن $U(\phi)$ دالة ملساء جزئيا على $[0\,,2\pi]$ ودورتها 2π، ولتكن:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta.$$

إذن:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{in\theta} = \frac{1}{2}\, [U(\phi+0) + U(\phi-0)]$$

لاحظ أن متسلسلة فورير (4) تتقارب، وتتفق مع النهاية العلوية. ولكن الأخيرة توجد حتى عندما تتباعد (4).

البرهان

إذا كانت $U(\phi)$ تفاضلية على $a<\phi<b$، فإن التكامل:

$$\int_a^b U(\phi) e^{in\phi}\, d\phi = \frac{U(\phi)e^{ik\phi}}{ik} \Bigg|_a^b - \frac{1}{ik} \int_a^b U'(\phi)\, e^{in\phi}\, d\phi$$

ينعدم عندما $k \to \infty$ ، لأن التكامل الأخير محدود. وعليه ، فإن التكامل على الفترة $[0\,,2\pi]$ سوف ينعدم أيضاً عندما $k \to \infty$. الآن :

$$s_k\,(\phi) = \sum_{n=-k}^{k} c_n\, e^{in\phi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\theta)\left[\sum_{n=-k}^{k} e^{in(\phi-\theta)}\right] d\theta$$

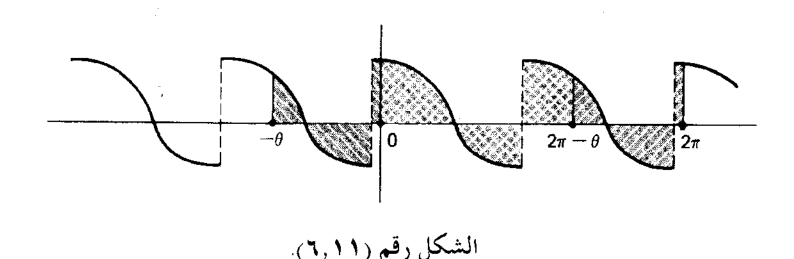
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\theta)\left[\frac{e^{-ik(\phi-\theta)} - e^{i(k+1)(\phi-\theta)}}{1-e^{i(\phi-\theta)}}\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\,(k+\frac{1}{2})(\phi-\theta)}{\sin\frac{1}{2}(\phi-\theta)}\;U(\theta)\;d\theta,$$

وبوضع $t = \theta - \phi$ ، وبالتكامل على الفترة $[-\pi, \pi]$ ، وبتقسيم فترة التكامل إلى نصفين ، يمكن أن نكتب :

$$s_k\,(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\,(k+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}\,[U(\phi+t)+U(\phi-t)]\,dt$$

(انظر الشكل (٦,١١).



الشكل رقم (٦,١١).

وعلى وجه الخصوص، إذا كانت $U(\phi) = 1$ لكل ϕ، فإن $c_0 = 1$ و$c_n = 0$ لكل $n \neq 0$، وحيث:

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin (k+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2} t} \,.\, 2 \; dt \,.$$

وبضرب هذه المتطابقة في $[U(\phi+0) + U(\phi-0)]/2$ نحصل على:

$$s_k(\phi) - \frac{U(\phi+0)+U(\phi-0)}{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin (k+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2} t} [U(\phi+t) - U(\phi+0) + U(\phi-t) - U(\phi-0)] \, dt$$

وبما أن المشتقات من جهة واحدة للدالة U موجودة، فإن الدالة:

$$\frac{t}{\sin \frac{1}{2} t} \left[\frac{U(\phi+t)-U(\phi+0)}{t} + \frac{U(\phi-t)-U(\phi-0)}{t} \right]$$

ملساء جزئيا على $0 \leq t \leq \pi$، ولذا تطبق الملحوظة الأولى في هذا البرهان، والتكامل:

$$\int_0^\pi \frac{\sin (k+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2} t} [U(\phi+t) - U(\phi+0) + U(\phi-t) - U(\phi-0)] \, dt$$

ينعدم عندما $k \to \infty$ وعليه فإن:

$$\lim_{k\to\infty} s_k(\phi) = \frac{1}{2} [U(\phi+0) + U(\phi-0)] \quad \blacksquare$$

مثال (٦,٤,٤)

بيّن أن:

$$\frac{\pi-2}{4} = \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 3} - \frac{1}{7\cdot 9} + \ldots.$$

وذلك بحساب متسلسلة فورير للدالة :

$$U(\phi) = \begin{cases} \sin\phi, & 0 \le \phi \le \pi \\ 0, & \pi \le \phi \le 2\pi \end{cases}$$

الحل

الدالة $U(\phi)$ ملساء جزئيا :

$$2\pi\, c_n = \int_0^{\pi} \sin\phi\, e^{in\phi} d\phi = \frac{1}{2i} \int_0^{\pi} e^{i(1-n)\phi} - e^{-i(1+n)\phi}\, d\phi,$$

تؤدي إلى $c_{\pm 1} = \pm[4\,i]^{-1}$, $c_{2k} = [\pi(1-4k^2)]^{-1}$ ، والمعاملات الباقية تساوي صفرا .

بما أن $c_{2k} = c_{-2k}$ و $c_{-1} = -c_1$ ، فإنه :

$$c_{2k}\; e^{2k\phi i} + c_{-2k}\; e^{-2k\phi i} = 2\, c_{2k} \cos 2k\phi \;,$$
$$c_1\; e^{i\phi} + c_{-1}\; e^{-i\phi} = 2\, ic_1\, \sin\phi \;,$$

و :

$$U(\phi) = \frac{\sin\phi}{2} + \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\phi}{(1-2k)(1+2k)} \;.$$

و على وجه الخصوص ، لقيمة $\phi = \pi/2$ نجد أن : $U(\pi/2) = 1$ ، لذا :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k+1)} \;.$$

إذن :

$$\frac{\pi-2}{4} = \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} - \frac{1}{7\cdot 9} + \ldots.$$

تمارين (٦,٤)

(١) لتكن الشريحة G على شكل قرص دائري ولها درجة حرارة $u\,(e^{i\phi}) = \phi$ لقيم $0 \le \phi \le 2\pi$.

بيّن أن درجة الحرارة لقيم $z \ne 1$ تعطى بوساطة :

. $u(z) = \pi + 2\ \mathrm{Arg}(1 - z)$

(٢) أوجد درجة الحرارة في $|z| < 1$ ، إذا أعطيت درجة حرارة الحدود بالدالة . $u(e^{i\phi}) = \cosh\phi$

(٣) أوجد متسلسلة فورير لدالة $U(\phi) = \pi$ على $0 \le \phi \le \pi$ وتنعدم على . $\pi < \phi < 2\pi$

(٤) أوجد متسلسلة فورير لدالة $U(\phi) = \phi^2$ على $0 \le \phi \le 2\pi$.

(٥) استخدم متطابقة "بارسافيل" لبرهان نظرية "ليوفيل".

(**إرشاد للحل**: بيّن أن $|c_n| \le Mr^{-n}$ لكل n، حيث $|f(z)| \le M$).

(٦) طبق متطابقة "بارسافيل" على الدالة $U(\phi) = \phi$ وبيّن أن :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(٧) بيّن أن :

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

(٨) طبق متطابقة "بارسافيل" على الدالة $f(z) = (1 - z)^{-1}$، وبرهن على أن :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 - 2r\cos\phi + r^2} = \frac{1}{1 - r^2}, \qquad 0 \le r < 1.$$

(٩) طبق متطابقة "بارسافيل" على الدالة :

$$f(z) = 1 + z + \ldots + z^{n-1}.$$

وبرهن على أن :

$$\int_0^{2\pi} \left(\sin\frac{n\phi}{2} / \sin\frac{\phi}{2}\right)^2 d\phi = 2\pi n$$

(**إرشاد للحل**: $f(z) = (z^n - 1)/(z - 1)$ لكل $z \ne 1$).

(١٠) للأغراض الحسابية قربت معاملات متسلسلة فورير في المعادلة (4) بوساطة المجاميع ذات الصور $N c_n = \sum_{k=0}^{N-1} U\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{-2\pi i k n / N}$.

إذا كانت $n = n_2 N_1 + n_1$ ، $k = k_1 N_2 + k_2$ ، $N = N_1 \cdot N_2$ ، $n_j < N_j$ و $0 \le k_j$ بيّن أن:

$$Nc_n = \sum_{k_2=0}^{N_2-1} W_{N_2}^{n_2 k_2} \left\{ W_N^{n_1 k_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} U\left(\frac{2\pi k}{N}\right) W_{N_1}^{n_1 k_1} \right\} ,$$

حيث إن $W_N = e^{-2\pi i / N}$. وعليه $c_n = c_{n_1, n_2}$ وتأتي كتحويل لمعاملات N_2

$$c_{n_1, k_2} = W^{n_1 k_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} U\left(\frac{2\pi k}{N}\right) W_{N_1}^{n_1 k_1} \quad , \quad 0 \le k_2 < N_2 .$$

(١١) عمم تمرين (١٠) للحالة التي فيها $N = N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_m$. هذه هي الخطوات المستخدمة في "تحويل فورير السريع".

(٥ , ٦) تحويلات فورير

Fourier Transforms

يمكن أن نكتب متسلسلة فورير للدالة $U(\phi)$ ذات الدورة 2π في الصورة:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\phi} , \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{2\pi} U(\phi) e^{in\phi} d\phi$$

وكذلك، إذا كانت $U(\phi)$ لها الدورة $2\pi\lambda$ ، فبوضع $\psi = \phi / \lambda$ نحصل على دالة دورتها 2π ، إذن $U(\phi)$ لها متسلسلة فورير التالية:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\psi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\phi / \lambda}$$

حيث:

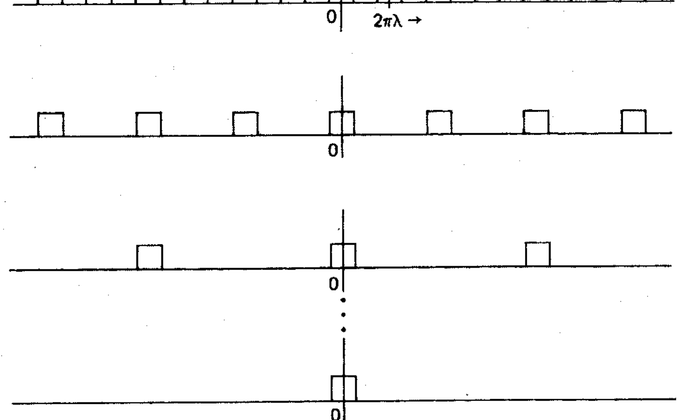
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(\lambda\psi) e^{in\psi} d\psi = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} U(\phi) e^{in\phi/\lambda} d\phi$$

ومع ذلك ، فكثير من الدوال المهمة ليست بدورية ، ومثال لذلك دالة النبض غير المكرر المفرد (single unrepeated puls). نأمل أن تقرب هذه الحالة بوساطة دالة تتكون من نبضات متطابقة كل منها تبعد عن الأخرى مسافة 2π ، باحثين عن التأثير الخاص بها في متسلسلة فورير، عندما $\lambda \to \infty$ (انظر الشكل (٦,١٢). لتكن $t_n = n/\lambda$ ، عرف :

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} U(\phi)\, e^{-in\phi}\, d\phi$$

ولاحظ أن $t_{n+1} - t_n = 1/\lambda$ ويمكن أن نكتب متسلسلة فورير في الصورة التالية :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{u(t_n)}{\lambda\sqrt{2\pi}}\, e^{it_n\phi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(t_n)\, e^{it_n\phi}\, (t_{n+1} - t_n)\ ,$$



الشكل رقم (٦,١٢). قطارات من النبضات لتردد متناقص.

مشابهة جدا في المظهر للمجموع الذي يعرف به تكامل ريمان. إذا جعلنا $\lambda \to \infty$ مع إهمال المشكلات التقليدية ، نحصل على التعبيرين :

$$\hat{U}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{it\phi}\, dt \;,\; u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\phi)\, e^{-it\phi}\, d\phi .$$

والتشابه بين الصيغتين للدوال $\hat{U}$ و u غير قابل للالتباس ، ويقال إنهما يكوّنان زوجا من تحويلات فورير ، وتسمى $u(t)$ بتحويل فورير للدالة $U(\phi)$ ، كما هو بالبند (٦,٤) ، فإن المشكلة الرئيسية هي اكتشاف تحت أ ي ظروف تتطابق القيمتان $\hat{U}(\phi)$ و $U(\phi)$ ، وحينئذٍ تمدنا $\hat{U}$ بصيغة المعكوس لتحويل فورير u. وهذا له التأثير لمضاعفة حجم الجدول المعطى للتكاملات ، لأنه إذا علمت صيغة حل محكمة (closed form solution) لتحويل فورير $u(t)$ فإنه يمكن معرفة ذلك أيضا لمعكوسهما. تمدنا النظرية التالية بالشروط المفيدة التي تتفق بها $\hat{U}(\phi)$ و $U(\phi)$ ، ولكن وبدون عرض الأسباب فهي تمثل أفضل نظرية لهذا النوع.

نظرية فورير التكاملية Fourier integral theorem

إذا كانت $U(\phi)$ ملساء جزئيا ، $|U(\phi)|$ قابلة للتكامل على $-\infty < \phi < \infty$ فإن :

$$\text{PV}\ \hat{U}(\phi) = \text{PV} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{it\phi}\, dt = \frac{1}{2}\,[U(\phi+0) + U(\phi-0)]$$

البرهان

بما أن $|U(\phi)|$ قابلة للتكامل فإن التكامل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(\phi)\, e^{it(\theta-\phi)}\, d\phi$$

يتقارب بانتظام بالنسبة إلى t على أي مدى محدود. وربما نكامل بالنسبة إلى t على الفترة $(-T, T)$ ، ونعكس ترتيب التكامل. وعليه فإن :

$$\int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{\infty} U(\phi)\, e^{it(\theta-\phi)}\, d\phi\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} U(\phi) \int_{-T}^{T} e^{it(\theta-\phi)}\, d\phi\, dt$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} U(\phi) \frac{\sin T(\theta-\phi)}{\theta-\phi}\, d\phi \ ,$$

و : $\Phi > |\theta| + 1$ (θ ثابتة) يمكن اختيارها بحيث إن :

$$\int_{|\phi|>\Phi} |U(\phi)|\, d\phi < \frac{\varepsilon}{4} .$$

إذن لقيم : $1 < |\theta| - \Phi$ نحصل على :

$$\left| \int_{|\phi|>\Phi} U(\phi) \frac{\sin T(\theta-\phi)}{\theta-\phi}\, d\phi \right| \le \int_{|\phi|>\Phi} |U(\phi)|\, d\phi < \frac{\varepsilon}{4} .$$

وكما جاء بالجزء الأول من برهان نظرية التقارب لمتسلسلة فورير بالبند (٦,٤) :

$$\int_{\theta+\delta}^{\Phi} \frac{U(\phi)}{\theta-\phi} \sin T(\theta-\phi)\, d\phi \to 0 \ \text{as} \ T \to \infty, \qquad (1)$$

وبالمثل يكون ذلك للتكامل على $[-\Phi , \theta -\delta]$ ، وعليه نحصل لقيم T الكبيرة على :

$$\left| \int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{\infty} U(\phi)\, e^{it(\theta-\phi)}\, d\phi\, dt - 2 \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} U(\phi) \frac{\sin T(\theta-\phi)}{\theta-\phi}\, d\phi \right| < \varepsilon.$$

ولكن بتغير المتحولات ، نجد أن :

$$\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} U(\phi) \frac{\sin T(\theta-\phi)}{\theta-\phi}\, d\phi = \int_{0}^{\delta} \frac{\sin T\phi}{\phi} [U(\theta+\phi) + U(\theta-\phi)]\, d\phi,$$

وينتج من ذلك أن :

$$\text{PV}\ \hat{U}(\theta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\delta} \frac{\sin T\phi}{\phi} [U(\theta+\phi) + U(\theta-\phi)]\, d\phi, \qquad (2)$$

وبما أن المشتقات من جهة واحدة للدالة U موحدة ، فإن الدالة :

$$\frac{U(\theta+\phi) - U(\theta+0) + U(\theta-\phi) - U(\theta-0)}{\phi}$$

ملساء قطعيا. ومن (1) فإن :

$$\int_{0}^{\delta} \sin T\phi \left[\frac{U(\theta+\phi) + U(\theta-\phi) - U(\theta+0) - U(\theta-0)}{\phi} \right] d\phi \to 0$$

عندما $T \to \infty$، وبالتالي نحصل على:

$$\text{PV } \hat{U}(\theta) = \lim_{T\to\infty} \frac{U(\theta+0)+U(\theta-0)}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin T\phi}{\phi}\, d\phi$$

$$= \frac{U(\theta+0)+U(\theta-0)}{\pi} \lim_{T\to\infty} \int_0^{T_\delta} \frac{\sin\psi}{\psi}\, d\psi$$

$$= \frac{1}{2}\,[U(\theta+0) + U(\theta-0)]$$

وذلك بوساطة تكامل "دي رشيليه" [تمرين (١٦) الوارد بـالبند (٢,٢) ومثال (٤,٤,١) بالبند (٤,٤). ■

مثال (٦,٥,١)

بفرض أن $U(\phi) = e^{-|\phi|}$ فإن $|U(\phi)|$ قابلة للتكامـــل. و$U(\phi)$ ملســـاء جزئيا ولها تحويل فورير التالي:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(-it+1)\phi}\, d\phi + \int_0^{\infty} e^{(-it-1)\phi}\, d\phi \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+t^2)}$$

ويحقق:

$$e^{-|\phi|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\phi}}{1+t^2}\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{\cos t\phi}}{1+t^2}\, dt\,.$$

قارن هذه النتيجة بالمثال (٤,٣,١) من البند (٤,٣).

مثال (٦,٥,٢)

إفصل التكاملات كما في الحسابات السابقة للحصول على المساواة:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y|t|-i(\phi-x)t}\, dt = \frac{2y}{(\phi-x)^2+y^2}$$

فنحول صيغة "بواسون" التكاملية لنصف المستوى العلوي [التمرين (٤) بالبند (٦,٢)] إلى:

$$U(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\phi)}{(\phi-x)^2+y^2}\, d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\phi) e^{-y|t|-i(\phi-x)t}\, dt\, d\phi$$

وبتغير ترتيب التكامل وبجعل $u(t)$ تمثل تحويل فورير للدالة $U(\phi)$ نحصل على:

$$U(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-y|t|+ixt}\, dt$$

$$= \left\{ \operatorname{Re} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} u(t)\, e^{izt}\, dt \right\}, \qquad (3)$$

لأن $u(-t) = \overline{u(t)}$ للدوال الحقيقية $U(\phi)$ وبالتالي:

$$2\operatorname{Re} u(t)\, e^{izt} = u(t)\, e^{izt} + \overline{u(t)}\, e^{-i\bar{z}t}$$

$$= u(t)\, e^{(-y+ix)t} + u(-t)\, e^{(y+ix)(-t)} .$$

الصيغة (3) هي النظير لنصف المستوى العلوي لمفكوك متسلسلة فورير لصيغة "بواسون" التكاملية على القرص.

تمارين (٥, ٦)

أوجد تحويلات فورير للدوال المعطاة في التمارين من (١) إلى (٤).

(**إرشاد للحل**: استخدم التكاملات عل المسار الوارد في البند (٤,٣)).

(١) $\dfrac{b}{x^2+b^2}$ (٢) $\dfrac{x}{x^2+b^2}$

(٣) $\frac{x^2}{(x^2+b^2)^2}$ (٤) $\frac{1}{x^4+b^4}$

أوجد تحويلات فورير للدوال المعطاة في التمارين من (٥) إلى (٨).

(**إرشاد للحل**: استخدم التكاملات بالبندين (٢,٢) و(٤,٥)).

(٥) e^{-kx^2} (٦) $x\, e^{-kx^2}$

(٧) $\frac{1}{\sinh x}$ (٨) $\frac{x}{\sinh x}$

(٩) افترض أن $U(\phi) = 1/\sqrt{\phi}$ على $0 < \phi < \infty$ وتنعدم على $-\infty < \phi \leq 0$. أوجد دالة توافقية في نصف المستوى العلوي ولها قيم حدودية $U(\phi)$.

(١٠) بفرض أن اللوح G له شكل نصف المستوى العلوي، وله درجة حرارة 1° على الفترة $[-1 , 1]$ ودرجة حرارة 0° على الباقي من المحور الحقيقي. أوجد درجة الحرارة عند كل نقطة من G.

(١١) افترض أن $U = \hat{U}$ على أغلب نقط $(-\infty , \infty)$. وبدون الاهتمام بالتقارب، بين أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(\phi)\, \overline{V(\phi)}\, d\phi = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, \overline{v(t)}\, dt ,$$

حيث u و v تحويلا فورير للدالتين U و V على الترتيب. واحصل بالتالي على متطابقة "بارسيفال" للتكامل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(\phi)|^2\, d\phi = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2\, dt$$

(١٢) بين أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\phi|}\, d\phi = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} .$$

(**إرشاد للحل**: استخدم تمرين (١١) السابق).

(٦,٦) تحويلات لابلاس

Laplace Transforms

غالبا لا يمكن، استخدام طرق تحويل فورير في تحليل الدوال غير القابلة للتكامل المطلق (absolutely itegrable) على $(-\infty,\infty)$ فعلى سبيل المثال، دالة "هيفيسايد" (Heaviside function):

$$H(\phi - a) = \begin{cases} 1, & \phi > a, \\ 0, & \phi < a, \end{cases}$$

ليس لها تحويل فورير، فالتكامل:

$$\int_a^\infty e^{-it\phi}\, d\phi .$$

متباعد. ذلك لأن المضروب $e^{-it\phi}$ لا يؤول إلى الصفر عندما $\phi \to \infty$، ويأخذنا ذلك إلى محاولة استخدام مضاريب لها الصورة $e^{-(q+it)\phi} = e^{-s\phi}$ التي تنعدم لقيم $q > 0$ عندما $\phi \to \infty$. تسمى الدالة:

$$\mathcal{L}_2\{U(\phi)\}(s) = \int_{-\infty}^\infty U(\Phi) e^{-s\phi}\, d\phi \qquad (1)$$

"تحويل لابلاس ذا الجهتين" (two-sided Laplace transform) للدالة $U(\phi)$. بكتابة $s = q + it$، تصبح المعادلة (1) كما يلي:

$$\int_{-\infty}^\infty U(\phi)\, e^{-q\phi}\, e^{-it\phi}\, d\phi,$$

وهي تحويل فورير للدالة $\sqrt{2\pi}\, U(\phi)\, e^{-q\phi}$.

وبدلا من تطوير

تحويل لابلاس ذي الجهتين، من الملائم كثيرا أن نكتب التكامل (1) كجزئين:

$$\int_{-\infty}^\infty U(\phi)\, e^{-s\phi} d\phi = \int_{-\infty}^0 U(\phi)\, e^{-s\phi} d\phi + \int_0^\infty U(\phi)\, e^{-s\phi} d\phi$$

$$= \int_0^\infty U(-\phi)\, e^{s\phi}\, d\phi + \int_0^\infty U(\phi)\, e^{-s\phi}\, d\phi,$$

عندها تسمى دراسة الخواص للتكامل:

$$\mathcal{L}\{U(\phi)\}\,(\mathrm{s}) = \int_0^\infty U(\phi)\, e^{-s\phi}\, d\phi. \tag{2}$$

تحويل لابلاس من جهة واحدة (one-sided) للدالة $U(\phi)$، ويمكننا فحص سلوك تحويل لابلاس من جهتين، لأن:

$$\mathcal{L}_2\{U(\phi)\}\,(\mathrm{s}) = \mathcal{L}\,\{U(-\phi)\}\,(-\,\mathrm{s}) + \mathcal{L}\,\{U(\phi)\}\,(\mathrm{s})$$

وتحويل لابلاس من جهة واحدة والمعرف بالمعادلة (2) له خواص عديدة مثل خواص متسلسلة القوى. وسوف نبرهن على وجود نصف مستوى التقارب متشابها مع فكرة نصف قطر التقارب في نظرية "آبل" (Abel's theorem) وسوف يتقارب تحويل لابلاس للجهتين في الشريحة $a < \operatorname{Re} s < b$، حيث $(a \le b)$ متشابها مع التطور لمتسلسلة لورانت.

نظرية

افترض أن $U(\phi)$ ملساء جزئيا ولها رتبة أسية (exponential order) (أي يوجد ثابتان حقيقيان a و Φ حيث تكون $|\,U(\phi)\,|\; e^{-a\phi}$ محدودة لكل $\Phi < \phi$). إذن تحويل لابلاس $\mathcal{L}\,\{U\}\,(s)$ دالة تحليلية على $\operatorname{Re} s > a$ (نصف مستوى التقارب).

البرهان

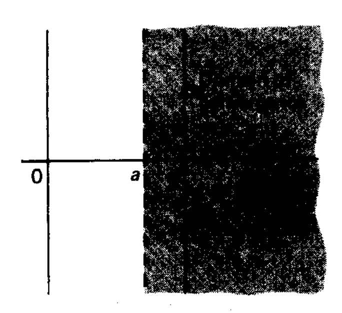
لتكن M حدا نهائيا للدالة $|\,U(\phi)\,|\; e^{-a\phi}$ على $\phi > \Phi$، إذن نحصل:

$$\int_0^\infty |U(\phi)\, e^{-s\phi}|\, d\phi \le \int_0^\Phi |U(\phi)\, e^{-s\phi}|\, d\phi + M \int_\Phi^\infty |e^{-(s-a)\phi}|\, d\phi,$$

ولكن $U(\phi)$ محدودة على $[0\,,\Phi]$، لأنها متصلة جزئيا، ويؤدي ذلك إلى أن التكامل الأول محدود، وبالتالي فإن:

$$\int_\Phi^\infty |e^{-(s-a)\phi}|\, d\phi = \int_\Phi^\infty e^{-(\operatorname{Re} s-a)\phi}\, d\phi = \frac{e^{-(\operatorname{Re} s-a)\Phi}}{\operatorname{Re} s-a} < \infty\,,$$

ولذا يتقـــارب تحويل لابلاس للدالة $U(\phi)$ تقـاربا مطلقا على $\operatorname{Re} s > a$ [انظر الشكل (٦,١٣)].



الشكل رقم (٦,١٣). نصف مستوى التقارب.

تـؤدي هـذه المعادلـة الأخيرة إلى أن يتقـارب تحويـل "لابـلاس" بانتظـام علـى أي مجموعة تقع كلية في نصف مستوى التقارب، لأن:

$$\left| \int_0^\infty U(\phi)\, e^{-s\phi}\, d\phi \right| \le M \frac{e^{-(\operatorname{Re} s-a)\phi}}{\operatorname{Re} s - a}$$

عندما تكون $\phi > \Phi$ و ϕ يمكـن أن تختـار لكي تجعـل الطـرف الأيمـن مـن المعادلـة السـابقة أصغر من العدد الاختياري $\varepsilon > 0$، لكل s في D.

وللأعداد الصحيحة $n \ge 0$، تكون الدوال:

$$u_n(s) = \int_0^n U(\phi)\, e^{-s\phi}\, d\phi .$$

تحليلية في المنطقة $\operatorname{Re} s > a$ لأن:

$$u_n'(s) = -\int_0^n \phi\, U(\phi)\, e^{-s\phi}\, d\phi .$$

إذن، وبوساطة نظرية "فايرستراس"، تكون المتسلسلة للدوال التحليلية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [u_{n+1}(s) - u_n(s)] = \int_0^\infty U(\phi)\, e^{-s\phi}\, d\phi = \mathcal{L}\{U(\phi)\}(s)$$

دالة تحليلية في $\operatorname{Re} s > a$. وعلى وجه الخصوص :

$$\blacksquare \ \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{U(\phi)\}(s) = -\int_0^{\infty} \phi U(\phi)\, e^{-s\phi}\, d\phi = -\mathcal{L}\{\phi U(\phi)\} \qquad (3)$$

مثال (٦،٦،١)

بين أن :

$$\mathcal{L}\{e^{-z\phi}\} = \frac{1}{s+z}$$

لقيم $\operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} z$.

الحـــل

في المنطقة $\operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} z$، نجد أن :

$$\mathcal{L}\{e^{-z\phi}\} = \int_0^{\infty} e^{-z\phi}\, e^{-s\phi}\, d\phi = \frac{e^{-(s+z)\phi}}{-(s+z)}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{s+z}$$

مثال (٦، ٦، ٢)

تحقق من أن :

$$\mathcal{L}\{\phi^{n}\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

لقيم $\operatorname{Re} s > 0$ و $n = 0, 1, 2, \ldots$.

الحـــل

بتكرار التكامل بالتجزيء، نحصل على :

$$\mathcal{L}\{\phi^{n}\} = \int_0^{\infty} e^{-s\phi}\, d\phi$$

$$= \frac{\phi^n e^{-s\phi}}{-s} \Big|_0^\infty \quad + \frac{n}{s} \int_0^\infty \Phi^{n-1} e^{-s\phi} \, d\phi$$

$$= \frac{n}{s} \left[\frac{\phi^{n-1} e^{-s\phi}}{-s} \Big|_0^\infty + \frac{n-1}{s} \int_0^\infty \Phi^{n-2} e^{-s\phi} \, d\phi \right]$$

$$\vdots$$

$$= \frac{n!}{s^n} \left[\int_0^\infty e^{-s\phi} \, d\phi \right] = \frac{n!}{s^{n+1}} .$$

ويمكننا أيضا وضع $z = 0$ في المثال (٦,٦,١) ونستخدم المعادلة (3) بتكرار لنحصل على النتيجة المطلوبة.

هناك نتيجتان أخريان مفيدتان في حساب تحويلات لابلاس هما نظريتا الإزاحة (shifting theorems) لاحظ أن :

$$\int_0^\infty (U(\phi) e^{-z\phi}) e^{-s\phi} \, d\phi = \int_0^\infty U(\phi) e^{-(s+z)\phi} \, d\phi ,$$

تعطي نظرية الإزاحة الأولى (first shifting theorem) :

$$\mathcal{L} \{U(\phi) e^{-z\phi}\} (s) = \mathcal{L} \{U(\phi)\} (s+z)$$

فالتعبير الأخير يعني أن s الموجودة في $\mathcal{L}\{U\}$ قد بدلت بالمتغير $s + z$. إذا كانت $a \geq 0$ ، نحصل على :

$$\int_0^\infty (U(\phi) H(\phi - \mathrm{a}) e^{-s\phi} \, d\phi = \int_0^\infty U(\phi) e^{-s\phi} \, d\phi .$$

بالتعويض بالمتغير $\phi = \theta + a$ في الطرف الأيمن لهذه المعادلة ، نحصل على :

$$\int_0^\infty (U(\phi) H(\phi - \mathrm{a}) e^{-s\phi} \, d\phi = e^{-as} \int_0^\infty U(\theta + a) e^{-s\theta} \, d\theta .$$

يمكن أن تعاد كتابة هذه المعادلة على أنها نظرية الإزاحة الثانية (second shifting theorem) :

$$\mathcal{L} \{U(\phi) H(\phi - a)\} = e^{-as} \; \mathcal{L} \{U(\phi + a)\} .$$

ويوضح المثالان التاليان استخدام نظريتي الإزاحة.

مثال (٣, ٦, ٦)

تحقق من صحة ما يأتي لأي عدد صحيح $n \geq 0$:

$$\mathcal{L}\{\phi^n e^{-z\phi}\} = \frac{n!}{(s+z)^{n+1}}, \qquad \text{Re}\, s > -\text{Re}\, z .$$

الحـــل

يمكن أن تستخدم المعادلة (3) بالتكرار للحصول عل هذه النتيجة. ولكن الأكثر سهولة أن تستخدم نظرية الإزاحة الأولى عندما نحصل فعلا على نتيجة مثال (٦,٦,٢). إذن:

$$\mathcal{L}\{\phi^n e^{-z\phi}\} = \mathcal{L}\{\phi^n\}\ (s+z) = \frac{n!}{(s+z)^{n+1}} .$$

مثال (٤, ٦, ٦)

بيّن أنه إذا كانت $a > 0$ فإن:

$$\mathcal{L}\{e^{-z\phi} H(\phi - a)\} = \frac{e^{-a(s+z)}}{s+z}, \qquad \text{Re}\, s > -\text{Re}\, z .$$

الحـــل

بتطبيق نظرية الإزاحة الثانية والمثال (٦,٦,١) ينتج:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-z\phi} H(\phi - a)\} &= e^{-as}\, \mathcal{L}\{e^{-z(\phi+a)}\} \\ &= e^{-a(s+z)}\ \mathcal{L}\{e^{-z\phi}\} \end{aligned}$$

وفي الحالة الخاصة، لاحظ أن:

$$\mathcal{L}\{H(\phi - a)\} = \frac{e^{-as}}{s}, \qquad \text{Re}\, s > 0,$$

وذلك بوضع $z = 0$.

لاحظ أن تحويل لابلاس خطي :

$$\mathcal{L}\{a\,U(\phi)+bV(\phi)\} = \int_0^\infty [aU(\phi)+bV(\phi)]\, e^{-s\phi}\, d\phi$$

$$= a\int_0^\infty U(\phi) e^{-s\phi}\, d\phi + b\int_0^\infty V(\phi)\, e^{-s\phi}\, d\phi$$

$$= a\,\mathcal{L}\{U(\phi)\} + b\,\mathcal{L}\{V(\phi)\}.$$

مثال (٥, ٦, ٦)

بين أنه إذا كان $\operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} z|$ فإن :

$$\mathcal{L}\{\cos z\phi\} = \frac{s}{s^2+z^2} \quad \text{و} \quad \mathcal{L}\{\sin z\phi\} = \frac{z}{s^2+z^2}$$

الحـــل

لاحظ أن :

$$\mathcal{L}\{\cos z\phi\} = \mathcal{L}\{\frac{1}{2}(e^{iz\phi}+e^{-iz\phi})\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-iz}+\frac{1}{s+iz}\right) = \frac{s}{s^2+z^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sin z\phi\} = \mathcal{L}\{\frac{1}{2i}(e^{iz\phi}-e^{-iz\phi})\}$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-iz}-\frac{1}{s+iz}\right) = \frac{z}{s^2+z^2}$$

خاصية الاشتقاق Differentiation property

إذا كـانت $U(\phi)$ و $U'(\phi)$ دالتـين متسـاويتين جزئيـا وذاتـي رتـب أسـية (exponential order)، فإن :

$$\mathcal{L}\{U'(\phi)\} = s\,\mathcal{L}\{U(\phi)\} - U(0^+), \qquad (4)$$

حيث $U(0^+)$ هي النهاية من الجهة اليمنى للدالة U.

البرهان

بما أن U و U' من رتب أسية ، فإن كل حدود المعادلة (4)، توجد على المنطقة $\operatorname{Re} s > a$ وللبرهنة على (4) ، كامل بالتجزيء :

$$\int_0^\infty U(\phi)e^{-s\phi}\,d\phi = U(\phi)e^{-s\phi}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty U(\phi)e^{-s\phi}\,d\phi$$

مثال (٦, ٦ , ٦)

تحقق من أن :

$$\mathcal{L}\{\sin^2 z\phi\} = \frac{z^2}{s(s^2+4z^2)}\,, \qquad Re\, s > 2\,|\operatorname{Im} z\,|$$

الحـــل

بما أن :

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2z\phi}{4z}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos 2z\phi) = \sin^2 z\phi,$$

فإن خاصتي الاشتقاق والخطية تعطى :

$$\mathcal{L}\{\sin^2 z\phi\} = s\,\mathcal{L}\left\{\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2z\phi}{4z}\right\}$$
$$= s\left(\frac{1}{2s^2} - \frac{1}{2(s^2+4z^2)}\right) = \frac{2z^2}{s(s^2+4z^2)}$$

عندما $\operatorname{Re} s > |\operatorname{Im}\ 2z\,|$.

يعرف التلفيف (convolution) لدالتين $U(\phi)$و$V(\phi)$ على أنه الدالة :

$$U * V(\phi) = \int_0^\phi U(t)\,V(\phi - t)\,dt\,.$$

لاحظ أن المبادلة بين U و V لا تغير قيمة التلفيف. وإذا ‍ ‍ ‍ت الدالتان U و V قابلتين للتكامل على $(0, \infty)$ فإن التلفيف يحقق المتطابقة:

$$\mathcal{L}\{U * V\} = \mathcal{L}\{U\}\, \mathcal{L}\{V\}. \tag{5}$$

أي أن "تحويل لابلاس للالتفاف هو حاصل ضرب تحويلات الدوال". والفروض السابقة كافية للسماح بعكس ترتيب التكامل:

$$\mathcal{L}\{U * V\} = \int_0^\infty \left[\int_0^\phi U(t)V(\phi - t)\, dt \right] e^{-s\phi}\, d\phi .$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty U(t)V(\phi - t)\, H(\phi - t)\, dt \right] e^{-s\phi}\, d\phi .$$

$$= \int_0^\infty U(t) \left[\int_0^\infty V(\phi - t)\, H(\phi - t)\, e^{-s\phi}\, d\phi \right] dt .$$

$$= \int_0^\infty U(t)\, \mathcal{L}\{V(\phi - t)\, H(\phi - t)\}\, dt ,$$

والتي نحصل عليها باستخدام نظرية الإزاحة الثانية:

$$\mathcal{L}\{U * V\} = \mathcal{L}\{V\} \int_0^\infty U(t)\, e^{-ts}\, dt = \mathcal{L}\{U\}\, \mathcal{L}\{V\}$$

يشير المثال التالي إلى أهمية مفهوم التلفيف.

مثال (٧، ٦، ٦)

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية:

$$U''(\phi) + 2\, wU'(\phi) + (w^2 + z^2)\, U(\phi) = V(\phi)$$

مع $U(\phi) = U'(\phi) = 0$.

الحـــل

باستخدام خاصية الاشتقاق، نحصل على:

$$[s^2 + 2ws + (w^2 + z^2)]\, \mathcal{L}\{U(\phi)\} = \mathcal{L}\{V(\phi)\}$$

ولكن بنظرية الإزاحة الأولى، نحصل على:

$$\mathcal{L}\{e^{-w\phi}\sin\ z\phi\}\ =\frac{z}{(z+w)^2+z^2}$$

وهكذا:

$$\mathcal{L}\{U(\phi)\}=\mathcal{L}\{z^{-1}e^{-w\phi}\sin\ z\phi\}\ \mathcal{L}\{V(\phi)\}\ ,$$

تعطي الحل التالي:

$$U(\phi)=\frac{1}{z}\int_0^{\phi}\ e^{-wt}\sin(zt)\ V(\phi-t)\ dt\ ,$$

يعلل المثال الأخير المفهوم المهم لتحويل الدالة. ويمكن أن نفكر في العديد من النظم الفيزيائية على أنها أدوات ننقل بها دالة معطاة داخلة (input function) V إلى دالة خارجية (output function) U. افترض أن كل الشروط الابتدائية تساوي صفرا عندما تكون $\phi=0$، وخذ تحويلات لابلاس للمعادلات التي تصف النظام، نحصل على التعبير:

$$\mathcal{L}\{U(\phi)\}=\frac{s\mathcal{L}\{V(\phi)\}}{Z(s)}$$

حيث $Z(s)^{-1}$، الدالة المحولة (transfer function)، وهي مستقلة عن V، لتكن U_H الدالة الخارجة عندما تكون $V(\phi)=H(\phi)$، إذن، وباستخدام مثال (٦,٦,٤)، نجد أن:

$$Z(s)\ \mathcal{L}\ \{U_H\}\ =\ \mathcal{L}\ \{H(\phi)\}=\frac{1}{s}$$

أو:

$$\mathcal{L}\{U\}\ =\frac{s\mathcal{L}\{V\}}{sZ(s)}=s\ \ \mathcal{L}\ \{U_H\}\mathcal{L}\ \{V\}=s\ \mathcal{L}\ \{U_H*V\}\ .$$

لذا، وبوساطة خاصية الاشتقاق نحصل على:

$$U(\phi)=(U_H*V)'(\phi)=\int_0^{\phi}\ U_H(t)V'(\phi-t)dt+U_H(\phi)V(0)\qquad(6)$$

وبمبادلة أوضاع $\mathcal{L}\,(U_H)$ و $\mathcal{L}\ \{V\}$ السابقتين، نحصل أيضا على المساواة:

$$U(\phi)=(V * U_H)'(\phi)=\int_0^{\phi} V(t)U'_H(\phi-t)dt \tag{7}$$

لأن الشروط الابتدائية تؤدي إلى أن $U_H(0) = 0$ تسمى المعادلتان (6) و(7) صيغتي دوهاميل (Duhamel's formulas)، وتعبر عن استجابة النظام لدالة داخلة $V(\phi)$ بدلالة الاستجابة المتناولة عمليا لدالة الهيفيسايد (Heaviside function).

تمارين (٦, ٦)

تحقق من تحويلات لابلاس ومناطق التقارب في التمارين من (١) إلى (١٣):

(١) $\mathcal{L}\{\cosh z\phi\}=\dfrac{s}{s^2-z^2} \quad , \quad \operatorname{Re} s>|\operatorname{Re} z|$

(٢) $\mathcal{L}\{\sinh z\phi\}=\dfrac{z}{s^2-z^2} \quad , \quad \operatorname{Re} s>|\operatorname{Re} z|$

(٣) $\mathcal{L}\{\phi\sin z\phi\}=\dfrac{2sz}{(s^2+z^2)^2} \quad , \quad \operatorname{Re} s>|\operatorname{Im} z|$

(٤) $\mathcal{L}\{\phi\cos z\phi\}=\dfrac{s^2-z^2}{(s^2+z^2)^2} \quad , \quad \operatorname{Re} s>|\operatorname{Im} z|$

(٥) $\mathcal{L}\{\phi\sinh z\phi\}=\dfrac{2sz}{(s^2-z^2)^2} \quad , \quad \operatorname{Re} s>|\operatorname{Re} z|$

(٦) $\mathcal{L}\{\phi\cosh z\phi\}=\dfrac{s^2+z^2}{(s^2-z^2)^2} \quad , \quad \operatorname{Re} s>|\operatorname{Re} z|$

(٧) $\mathcal{L}\{e^{-w\phi}\sin z\phi\}=\dfrac{z}{(s+w)^2+z^2} \quad , \quad \operatorname{Re}(s+w)>|\operatorname{Im} z|$

(٨) $\mathcal{L}\{e^{-w\phi}\cos z\phi\}=\dfrac{s+w}{(s+w)^2+z^2} \quad , \quad \operatorname{Re}(s+w)>|\operatorname{Im} z|$

(٩) $\mathcal{L}\{\phi^2\sin z\phi\}=\dfrac{2z(3s^2-z^2)}{(s^2+z^2)^3}, \quad \operatorname{Re} s>|\operatorname{Im} z|$

(١٠) $\mathcal{L}\{\phi^2 \cos z\phi\} = \dfrac{2s(s^2 - 3z^2)}{(s^2 + z^2)^3}, \qquad \operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} z|$

(١١) $\mathcal{L}\{\cos^2 z\phi\} = \dfrac{2z^2 + s^2}{s(s^2 + 4z^2)}, \quad \operatorname{Re} s > 2\ |\operatorname{Im} z|$

(١٢) $\mathcal{L}\{H(\phi - a)\sin z\phi\} = \dfrac{e^{-as}}{s^2 + z^2}(z\cos za + s\sin za), \operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} z|$

(١٣) $\mathcal{L}\{H(\phi - a)\cos z\phi\} = \dfrac{e^{-as}}{s^2 + z^2}(s\cos za - z\sin za), \operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} z|$

(١٤) حل المعادلة التفاضلية :

$$U''(\phi) + 3U'(\phi) + 2U(\phi) = \sin\phi, \; U(0) = U'(0) = 0$$

باستخدام تحويلات لابلاس.

(١٥) حل المعادلة التفاضلية :

$$U''(\phi) + U(\phi) = \phi\sin\phi \;,\; U(0) = 0 \;,\; U'(0) = 1$$

باستخدام تحويلات لابلاس.

(١٦) حل مجموعة المعادلات التفاضلية :

$$U'(\phi) = U(\phi) - V(\phi) + \sin\phi \;, \quad U(0) = 0$$
$$V'(\phi) = U(\phi) + V(\phi) + e^{\phi} \;, \quad V(0) = 1$$

باستخدام تحويلات لابلاس.

(١٧) أوجد تحويل لابلاس للحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\phi U''(\phi) + U'(\phi) + \phi U(\phi) = 0$$

(١٨) أعطِ مثالا لدالة ملساء جزئيا وليست ذات رتبة أسية (exponential order).

(١٩) أعطِ مثالا لدالة ذات رتبة أسية وليست ملساء جزئيا (piecewise smooth).

(٢٠) إذا كانت $U(\phi)$ ملساء جزئيا وذات رتبة أسية ، بيّن أن :

$$\mathcal{L}\left\{ \int_c^{\phi} U(\phi)\, d\phi \right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{U(\phi)\} = \frac{1}{s}\int_c^{0} U(\phi)\, d\phi$$

واستخدم ذلك لإيجاد تحويل لابلاس لتكامل الجيب (sine integral).

$$\mathrm{Si}\,(\phi) = \int_0^{\phi} \frac{\sin\phi}{\phi}\, d\phi$$

إذا كانت $U(\phi)$ و $U'(\phi)$ ملساوين جزئيا ومن رتبة أسية ، برهن على أن الشروط المعطاة في التمارين من (٢١) إلى (٢٣) قد مدّت منطقة التقارب للدالة $U'(\phi)$ لتحتوي على نصف المستوى الأيمن المغلق.

(٢١) $$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{U(\phi)\} = 0$$

(٢٢) $$\lim_{s\to\infty} s\,\mathcal{L}\{U(\phi)\} = U(0^+)$$

(٢٣) $$\lim_{\substack{0^+ \\ s\to\infty}} s\,\mathcal{L}\{U(\phi)\} = \lim_{\phi\to\infty} U(\phi)$$

(٢٤) هل يمكن للدوال :

$$\frac{s}{s-1}, \quad \frac{1}{\sqrt{s}}, \quad e^{s^{1/2}}$$

أن تمثل تحويلات لابلاس للدوال $U(\phi)$ التي تكوّن مع $U'(\phi)$ ملساء جزئيا وأنها ذات مرتبة أسية.

في التمارين من (٢٥) إلى (٢٧) برهن على أن التلفيف له خاصية التوزيع ، التبديل والتجميع :

(٢٥) $$U*(V_1+V_2) = U*V_1 + U*V_2$$

(٢٦) $$U*V = V*U$$

(٢٧) $$(U*V)*W = U*(V*W)$$

(٧, ٦) تحويل لابلاس العكسي

The Inverse Laplace Trannsform

نناقش في هذا البند وسيلة فعالة وقوية للغاية لحساب الدالة $U(\phi)$ إذا علمنا فقط تحويل لابلاس :

$$u(s) = \mathcal{L}\{U(\phi)\}(s) = \int_0^\infty U(\phi)\, e^{-s\phi}\, d\phi \tag{1}$$

لهـــــذه الدالة . وسنفترض أن $U(\phi)$ لها رتبة أسية وأن $|U(\phi)|\, e^{-a\phi}$ محدودة لقيم $\phi > \Phi$.

إذا كتبنا $s = q + it$، فإن تحويل لابلاس يصبح :

$$u(s) = \int_0^\infty \left(U(\phi)\, e^{-q\phi}\right) e^{-it\phi}\, d\phi \;,\quad q > a\;,$$

وهو تحويل فورير للدالة :

$$P(\phi) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\,U(\phi)e^{-q\phi}, & \phi \ge 0, \\ 0, & \phi < 0, \end{cases} \tag{2}$$

وبما أن $q > a$ فإن $|P(\phi)|$ قابلة للتكامل، ولذا تطبـــــق النظرية التكاملية لفورير، وتؤدي إلى أنه عند كل النقاط $\phi > 0$ من نقاط اتصال الدالة P نحصل على :

$$P(\phi) = \text{PV}\ \hat{P}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{PV}\int_{-\infty}^{\infty} u(q+it)\, e^{it\phi}\, dt$$

أو :

$$U(\phi) = \frac{1}{2\pi}\text{PV}\int_{-\infty}^{\infty} u(q+it)\, e^{(q+it)\phi}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\text{PV}\int_{q-i\infty}^{q+i\infty} u(s)\, e^{s\phi}\, ds \;,\quad s = q+it\,,\quad \phi > 0 \tag{3}$$

هذه المعادلة الأخيرة هي "الصيغة العكسية لتحويلات لابلاس" (inversion formula) وتكتب $U(\phi)= \mathcal{L}^{-1}\{u(s)\}$ عند كل نقط $\phi > 0$ لاتصال U، ونسمي U التحويل العكسي للدالة u. لاحظ في هذه الحالة الخاصة، أن الدوال المتصلة والملساء جزئيا والتي من رتبة أسية لها تحويلات لابلاس المختلفة.

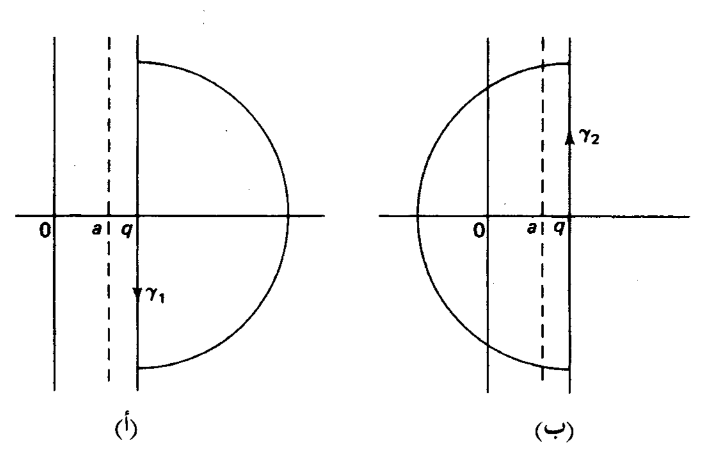
افترض أننا نرغب في إيجاد تحويل لابلاس العكسي لدالة وحيدة القيمة $u(s)$، $\text{Re}\, s > a$ إضافة إلى أن $u(s)$ تتلاشى عندما $s \to \infty$ في m. لاحظ لقيم $s = q + rei\theta, q > a$ أن:

$$| e^{s\phi} | = e^{q\phi + R\phi\cos\theta} \to 0$$

عندما $R \to \infty$، بشرط أن تكون $\phi \cos \theta < 0$، إذن التكاملان المساريان فوق المنحنيين المشار إليهما في شكل (٦,١٤):

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} u(s) e^{s\phi}\, ds\,, \quad \phi < 0\,, \qquad (4)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} u(s) e^{s\phi}\, ds\,, \quad \phi > 0\,, \qquad (5)$$



الشكل رقم (٦, ١٤). (أ) $\phi < 0$ و(ب) $\phi > 0$.

يتقـــاربـان إلى $\mathcal{L}^{-1}\{u(s)\}$ عندما $R \to \infty$. وبما أن $u(s)$ تحليليـــة في $\operatorname{Re} s>a$، فإن المعادلة (4) تنعدم بوساطة نظريـــة كوشي، ونحصل على $U(\phi)=0$ عندما تكون $\phi<0$، وأخيرا، تؤدي نظرية الباقي إلى أن:

$$U(\phi) = \sum_{\operatorname{Re} s<q} \operatorname{Res}\ u(s)e^{s\phi}, \qquad \text{if } \phi>0 \tag{6}$$

ولأن الدالة الأسية $e^{s\phi}$ تحليلية فإننا نحتاج إلى استخدام نقاط شاذة لتحويـل لابلاس $u(s) = \mathcal{L}\{U(\phi)\}$ في نصف المستوى $\operatorname{Re} s \le a$. وتمـــدنا المعادلة (6) بحساب مفيـد للصيغة العكسية (3) للدوال وحيدة القيمة $u(s)$ التي تنعدم عندما $s \to \infty$.

مثال (٦, ٧, ١)

أوجد المعكوس لتحويل لابلاس:

$$u(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \qquad \operatorname{Re} s > 0$$

الحـــل

للتحويل $u(s)$ أقطاب عند $s=-1$ و $s=-2$. وباستخدام صيغة الباقي في المعادلـة (6)، نحصل على:

$$U(\phi) = \operatorname{Res}_{-1} \frac{e^{s\phi}}{(s+1)(s+2)} + \operatorname{Res}_{-2} \frac{e^{s\phi}}{(s+1)(s+2)} = e^{-\phi} - e^{-2\phi}$$

مثال (٦,٧,٢)

أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالة:

$$u(s) = \frac{2s+3}{s^2+4}, \qquad \operatorname{Re} s > 0$$

الحل

توجد هنا الأقطاب عند $\pm 2i$ لذا فإن :

$$U(\phi) = \text{Res}_{2i}\,\frac{(2s+3)e^{s\phi}}{s^2+4} + \text{Res}_{-2i}\,\frac{(2s+3)e^{s\phi}}{s^2+4}$$
$$= \left(\frac{4i+3}{4i}\right)e^{2i\phi} + \left(\frac{-4i+3}{-4i}\right)e^{-2i\phi}$$
$$= 2\cos 2\phi + \frac{3}{2}\sin 2\phi$$

مثال (٣, ٧, ٦)

اعكس تحويل لابلاس للدالة :

$$. \; u(s) = \frac{e^{-2s}}{(s+3)^2}, \qquad \text{Re}\, s > 0$$

الحـــل

لا يمكن استخدام المعادلة (6)، لأن $u(s)$ لا تنعدم عندما $s \to \infty$ على امتداد المحور الحقيقي السالب. إلا أن الطريقة التي استخدمناها للحصول على المعادلة (6) يمكن أن توظف إلى الآن بالكامل :

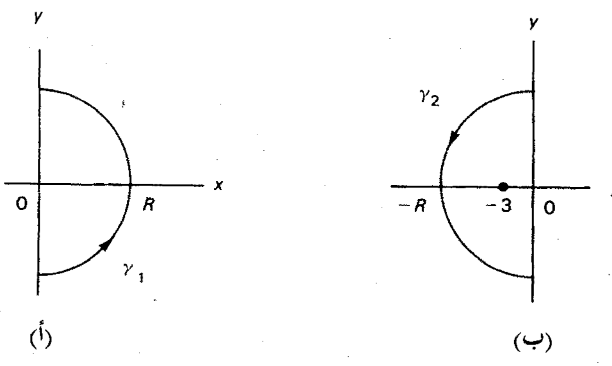
$$u(s)\; e^{s\phi} = \frac{e^{(\phi-2)s}}{(s+3)^2}$$

فوق المسارين الموضحين بالشكل (٦, ١٥) مع ملاحظة أن لقيمة $s = R\; e^{i\theta}$:

$$|e^{(\phi-2)s}| = e^{R(\phi-2)\cos\theta} \;\to 0$$

عندما $R \to \infty$ إذا كانت $(\phi-2)\cos\theta < 0$. وبتطبيق نظرية كوشي نحصل على

$$\phi < 2 \;\text{لكل}\; U(\phi) = \frac{-1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1}\frac{e^{(\phi-2)s}}{(s+3)^2}ds = 0$$



الشكل رقم (٦٫١٥). (أ) $\phi < 2$ ، (ب) $\phi > 2$

ولقيم $\phi > 2$ ، تعطي نظرية الباقي التالي:

$$U(\phi) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} \frac{e^{(\phi-2)s}}{(s+3)^2}\, ds$$

$$= \operatorname{Res}_{-3} \frac{e^{(\phi-2)s}}{(s+3)^2} = (\phi - 2)\, e^{-3(\phi-2)}$$

وعليه فإن:

$$u(\phi) = (\phi - 2)\, e^{-3(\phi-2)} H(\phi - 2) .$$

ولعكس تحويل لابلاس $u(s)$ المتعدد القيم، يجب إعطاء اهتمام خاص لتجنب مقابلة قواطع الفروع.

مثال (٦٫٧٫٤)

أوجد معكوس تحويل لابلاس:

$$u(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \quad , \quad \operatorname{Re}\, s > 0 .$$

الحــل

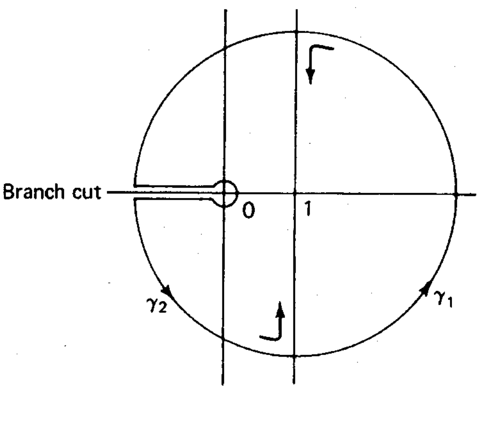
تشير نظرية كوشي إلى أن كلا من التكاملين:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_i}\frac{e^{s\phi}}{\sqrt{s}}ds=0\,,$$

حيث γ_1 و γ_2 هما المساران الموضحان في الشكل (٦,١٦) وبما أن:

$$|e^{(s-1)\phi}|=e^{R\phi\cos\theta}\to 0\,,$$

عندما تكون $R\to\infty$ و $\phi\cos\theta<0$ ، فإن الدالة $U(\phi)=0$ لقيم $\phi<0$.



الشكل رقم (٦,١٦).

لاحظ أن التكامل ينعدم لقيم $\phi>0$ عندما $R\to\infty$ على نصف دائرة كبيرة في γ_2 بينما:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|s|=r}\frac{e^{s\phi}}{\sqrt{s}}ds\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{r}e^{r\phi\cos\theta}d\theta\to 0,$$

عندما $r\to 0$ على دائرة صغيرة في γ_2 وعليه فإن:

$$U(\phi)=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{1-iR}^{1+iR}\frac{e^{s\phi}}{\sqrt{s}}ds$$

$$= \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{-r} \frac{e^{t\phi}dt}{\sqrt{|t|e^{-i\pi}}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{-r} \frac{e^{t\phi}dt}{\sqrt{|t|e^{i\pi}}} \right\},$$

وبوضع $x=-t$ نحصل على :

$$U(\phi) = \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \frac{1}{\pi} \int_{r}^{R} \frac{e^{-x\phi}dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x\phi}dx}{\sqrt{x}},$$

وباستخدام تعريف دالة جاما (gamma function) بتمرين (١٤) بالبند (٤,٥)، نحصل على :

$$U(\phi) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi\sqrt{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\phi}}$$

مثال (٦,٧,٥)

حل مسألة القيمة الابتدائية (initial value problem) التالية

$$U''(\phi) + 2wU'(\phi) + w^2U(\phi) = -\sin w\phi,$$
$$U(0) = 0, \qquad U'(0) = \frac{1}{2w}$$

الحل

باستخدام خاصية الاشتقاق بالبند (٦,٦) :

$$\mathcal{L}\{U''(\phi)\} = s\mathcal{L}\{U'(\phi)\} - \frac{1}{2w} = s^2\mathcal{L}\{U(\phi)\} - \frac{1}{2w},$$
$$\mathcal{L}\{U'(\phi)\} = s\mathcal{L}\{U(\phi)\},$$

وبتحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية تصبح :

$$(s^2 + 2ws + w^2)\mathcal{L}\{U(\phi)\} - \frac{1}{2w} = \frac{-w}{s^2 + w^2}$$

أو

$$\mathcal{L}\{U(\phi)\} = \frac{s-w}{2w(s+w)(s^2+w^2)}$$

وبوساطة النظرية العكسية (inversion theorem) لتحويلات لابلاس فإن:

$$U(\phi) = \sum_{s\leq 0} \text{Res } \mathcal{L}\{U(\phi)\}(s)e^{s\phi}$$

وعليه فإن:

$$U(\phi) = \frac{-e^{-w\phi}}{2w^2} + \frac{e^{iw\phi}}{4w^2} + \frac{e^{-iw\phi}}{4w^2} = \frac{\cos w\phi - e^{-w\phi}}{2w^2}$$

مثال (٦,٧,٦)

معادلة الانتشار الحراري (thermal diffusion equation) في قضيب موصل شبه محدود لها الصورة:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{7}$$

حيث δ هي معامل الانتشار (coefficient of diffusivity) الحراري في القضيب، x هي الموضع على القضيب، t الزمن و U درجة الحرارة.

أفترض أننا أعطينا الشروط الابتدائية والحدودية التالية:

$$\begin{aligned} &U(x,0) = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \\ &U(0,t) = c \neq 0, \quad t > 0, \\ &\lim_{x\to\infty} U(x,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

أوجد درجة الحرارة U عند أي نقطة x لأي زمن t.

الحل

عامل x على أنها متغير وسيط وعرف:

$$\mathcal{L}\{U(x,t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} U(x,t)dt.$$

بوساطة خاصية الاشتقاق، تصبح المعادلة (7) على الشكل الآتي:

$$s\mathcal{L}\{U\}-U(x,0)=\mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\}=\delta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{U\},$$

وذلك بمبادلة العمليات الخاصة بتحويلات لابلاس والاشتاق بالنسبة إلى x. ولأن هذه المبادلة ربما لا تحقق، فيجب أن نتأكد أن الأجوبة تحقق حل المسألة. وبوضع $u=\pounds\{U\}$ نحصل على المعادلة التفاضلية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{s}{\delta}u, \tag{9}$$

لأننا نعامل x على أنه المتغير المستقل و s المتغير الوسيط فيمكن إعادة كتابة الشروط الحدودية في (8) على الصورة:

$$u(0,s)=\mathcal{L}\{U(0,t)\}=\int_0^\infty ce^{-st}dt=\frac{c}{s} \tag{10}$$

و

$$\lim_{x\to\infty}u(x,s)=\int_0^\infty \lim_{x\to\infty}U(x,t)e^{-st}dt=0, \tag{11}$$

بشرط أن تحقق المبادلة بين التكامل والنهاية، ويكون الحل العام للمعادلة (9) له الصورة التالية:

$$u=c_1e^{\sqrt{s/\delta}x}+c_2e^{-\sqrt{s/\delta}x}$$

وبما أن $c=0$ من المعادلة (11) و $c_2=c/s$ من المعادلة (10) إذن:

$\mathcal{L}\{U\}=ce^{-\sqrt{s/\delta}x}/s$ ونستخدم النظرية العكسية لتحويلات لابلاس أو الملحق (٢) Appendix (2) لنحصل على:

$$U(x,t)=c\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{\delta t}}e^{-v^2}dv\right) \tag{12}$$

وللتحقق من أن المعادلة (12) تمثل في الواقع الحل لابد من ملاحظة التكامل:

$$\int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

من المثال (٢,٢,٣) بالبند (٢,٢) وبذلك تحقق الشروط الابتدائية والحدودية (8) وفوق ذلك نحصل على:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-c}{\sqrt{\pi \delta t}} e^{-x^2/4\delta t}$$

و

$$\delta \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{cx}{2\sqrt{\pi \delta}} \frac{e^{-x^2/4\delta t}}{t^{3/2}} = \frac{\partial U}{\partial t}$$

تمارين (٦,٧)

أوجد معكوس تحويلات لابلاس المعطاة في التمارين من (١) إلى (١٠) افترض أن كل تحويل يعرف في نصف المستوى $\operatorname{Re} s > a$ و b عدد حقيقي

(١) $\frac{1}{(s+a)^3}$ (٢) $\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$

(٣) $\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$ (٤) $\frac{1}{(s+a)^4}$

(٥) $\frac{1}{s(s^2+a^2)}$ (٦) $\frac{s}{s^3+a^3}$

(٧) $\frac{1}{(s^3+a^3)}$ (٨) $\frac{e^{-bs}}{(s+a)^3}$

(٩) $\frac{e^{-bs}}{s^2+a^2}$ (١٠) $\frac{e^{-bs}}{s(s^2+a^2)}$

استخدم الطريقة المستخدمة بالمثالين (٦,٧,٣) و(٦,٧,٤) لعكس تحويل لابلاس في التمارين من (١١) إلى (١٨) افترض أن $a\,,\ b > 0$:

(١١) $\operatorname{Re}\ s > 0$ ، $\frac{1}{\sqrt[3]{s}}$ (١٢) $\operatorname{Re}\ s > 0$ ، $\frac{1}{\sqrt[4]{s}}$

(١٣) $\operatorname{Log}\left(\dfrac{s-a}{s-b}\right), \qquad \operatorname{Re} s > \max(a,b)$

(١٤) $\tan^{-1}\dfrac{a}{s}, \qquad \operatorname{Re} s > 0$

(١٥) $\frac{1}{4}\operatorname{Log}\left(1+\dfrac{4a^2}{s^2}\right), \qquad \operatorname{Re} s > 0$

(١٦) $e^{-a\sqrt{s}}\ , \qquad \operatorname{Re} s > 0$

(١٧) $\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\ , \qquad \operatorname{Re} s > 0$

(١٨) $\dfrac{1}{2s}\operatorname{Log}(1+s^2), \qquad \operatorname{Re} s > 0$

(١٩) حل المعادلة التكاملية :

$$U(\phi)=\phi^2+\int_0^{\phi}\sin(\phi-t)U(t)dt.$$

(٢٠) حل المعادلة التكاملية :

$$U(\phi)=e^{-\phi}-2\int_0^{\phi}\cos(\phi-t)U(t)dt.$$

(٢١) حل المعادلة التفاضلية التكاملية :

$$U'(\phi)+\int_0^{\phi}U(t)dt=e^{-a\phi}, \qquad \phi>0,$$

إذا أعطينا $U(0)=c(\neq 0)$ وذلك باستخدام تحويلات لابلاس.

(٢٢) أوجد حل المعادلة التفاضلية للتأخير delay differential equation :

$$U''(\phi)=U(\phi-1)-U'(\phi-1)$$

إذا أعطينا $U(\phi)=1$ لقيم $-1\le\phi\le 0$

(٢٣) حل معادلة التلفيف convolution equation :

$$U(\phi)=1+\int_0^{\phi}(\phi-t)U(t)dt.$$

(٢٤) أوجد حل المعادلة الموجية (wave equation) :

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \qquad x,t > 0$$

تحت الشروط الابتدائية والحدودية التالية :

$$U(x,0) = 0, \;\; U_t(x,0) = 0, \qquad U(0,t) = \sin\frac{a\pi t}{b}, \quad U(b,t) = 0,$$

حيث a و b ثوابت لا تتغير.

(٢٥) أوجد تعبيرا لحل المعادلة الموجية :

$$U_{tt} = a^2 U_{xx},$$

على خيط نصف محدود، إذا أعطينا الشروط الابتدائية والحدودية التالية :

$$U(x,0) = f(x), \qquad x \geq 0$$

$$U_t(x,0) = 0, \qquad x \geq 0$$

$$U(0,t) = 0, \qquad t \geq 0$$

$$\lim_{x\to\infty} U(x,t) = 0, \qquad t \geq 0$$

(٢٦) خيط محدود، تحت تأثير دالة القوى $f(x,t)$ ، ويحقق معادلة الحركة :

$$U_{xx} - \frac{1}{a^2} U_{tt} = f(x,t)$$

والشروط الابتدائية المعطاة هي :

$$U(x,0) = g(x), \qquad 0 \leq x \leq L,$$

$$U_t(x,0) = h(x), \qquad 0 \leq x \leq L,$$

والخيط مثبت من أطرافه بحيث :

$$U(0,t) = U(L,t) = 0$$

استخدم تحويلات لابلاس للحصول على تعبير لحل هذه المسألة.

(٢٧) حل المعادلة التفاضلية الجزئية :

$$U_t = \delta U_{xx} + \mu U_x, \qquad t > 0, \quad x > 0.$$

إذا أعطينا الشروط الابتدائية والحدودية :

$$U(x,0) = 0, \qquad x \geq 0,$$

$$U(0,t) = c(\neq 0), \qquad t > 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} U(x,t) = \lim_{x\to\infty} U_x(x,t) = 0, \quad t > 0.$$

ملاحظات

البند (٦,٢)

توجد مناقشة أكثر فاعلية لمسألة "دي رشيليه" في المستوى المركب في المرجع [A,pp.237-253]. ولمسألة "دي رشيليه" في الفراغ الثلاثي دروس في نظرية الجهد (Potential theory)، وكمرجع كلاسيكي في هذا الفرع أنظر [ke]. والفرض على $U(\phi)$ في نظرية "بواسون" يمكن أن يهمل موضوعيا [Hf, ch.3, and H,ch.19].

البند (٦,٣)

توجد معالجة كاملة لشكل "جوكوفسكي" (Joukowski) في المرجع [R,pp.115-121].

البند (٦,٤)

لأجل مثال للدالة التي لها متسلسلة فورير متباعدة على الأعداد الكسرية في $[0,2\pi]$ أنظر المرجع [J,p.546]. ونظرية كاتسينلسون (Katznelson) [Studia Math., 26(1966), 301-304] تبين أنه لأي فئة S قياسها الصفر (measure zero)، توجد دالة متصلة تتباعد متسلسلة فورير لها على هذه المجموعة. والعكس، وبوساطة نتيجة كارلسون (L.Carleson) [Acta Math., 116(1966), 135-157]، فإن متسلسلة فورير للدالة المتصلة تتقارب باستثناء فئة قياسها صفر وتوجد مناقشة مركزة لمشكلة التقارب في المرجع [Hf]. والتكامل حدا حدا وكذلك الاشتقاق يمكن أن يطبق على متسلسلة

فورير لنحصل على متسلسلة فورير للتكامل غير المحدود أو الاشتقاق، إذا كانت الدوال المعطاة ملساء جزئيا.

البند (٦,٥)

اعتبرت تعريفات مختلفة لتحويلات لابلاس بالتتابع. وكل هذه التعريفات متكافئة حالة الدوران أو التكبير بالمقدار $\sqrt{2\pi}$.

البند (٦, ٦)

يوجد جدول تحويلات لابلاس في كتب متداولة في الرياضيات ويوجد أحد هذه الجداول في الملحق.

البند (٦,٧)

لبرهان الوحدانية لتحويل لابلاس للدوال المتصلة أنظر المرجع [M,p.412]. وتطور الصيغة العكسية لتحويلات لابلاس من الجهتين قد عرقل بسبب عدم وحدانيته. وأي صيغة عكسية لتحول لابلاس من الجهتين يجب أن تأخذ في الاعتبار منطقة التقارب.

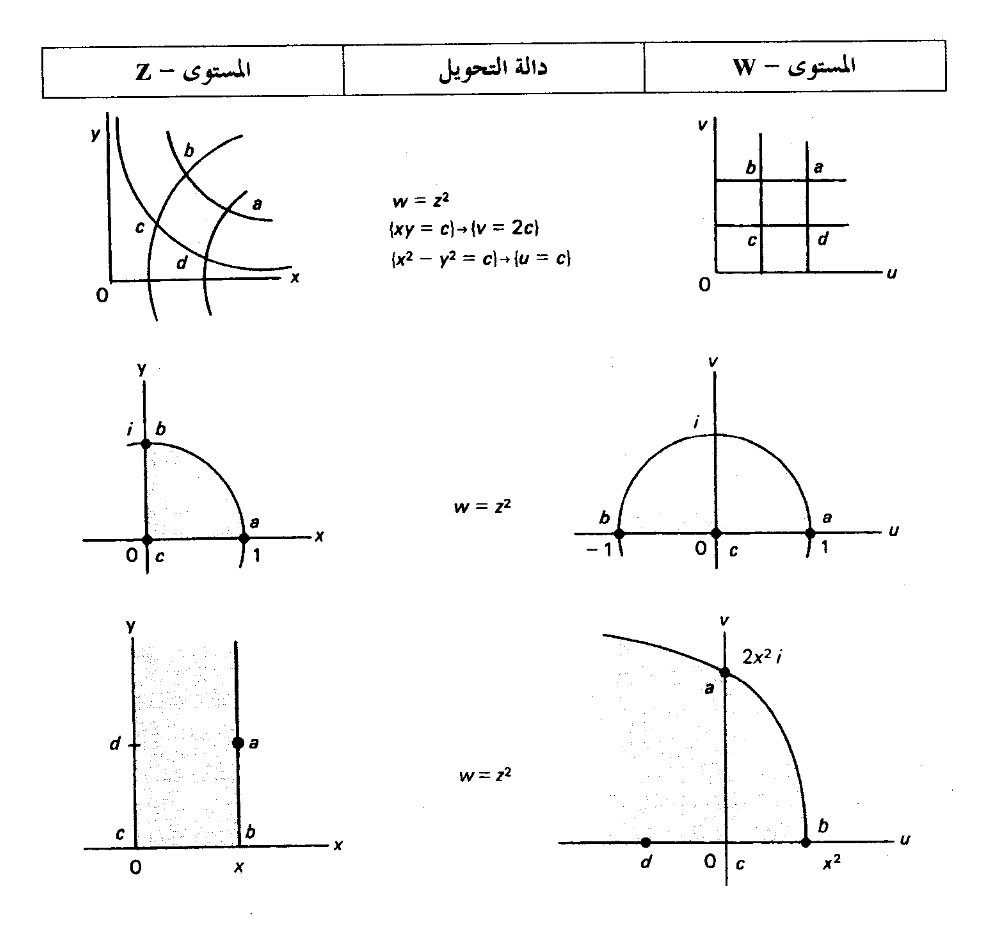
الملاحق

ملحق رقم (١)

جـدول الـدوال الحـافظـة للـزوايا

TABLE OF CONFORMAL MAPPINGS

المستوى – Z	دالة التحويل	المستوى – W



تابع الملحق رقم (١).

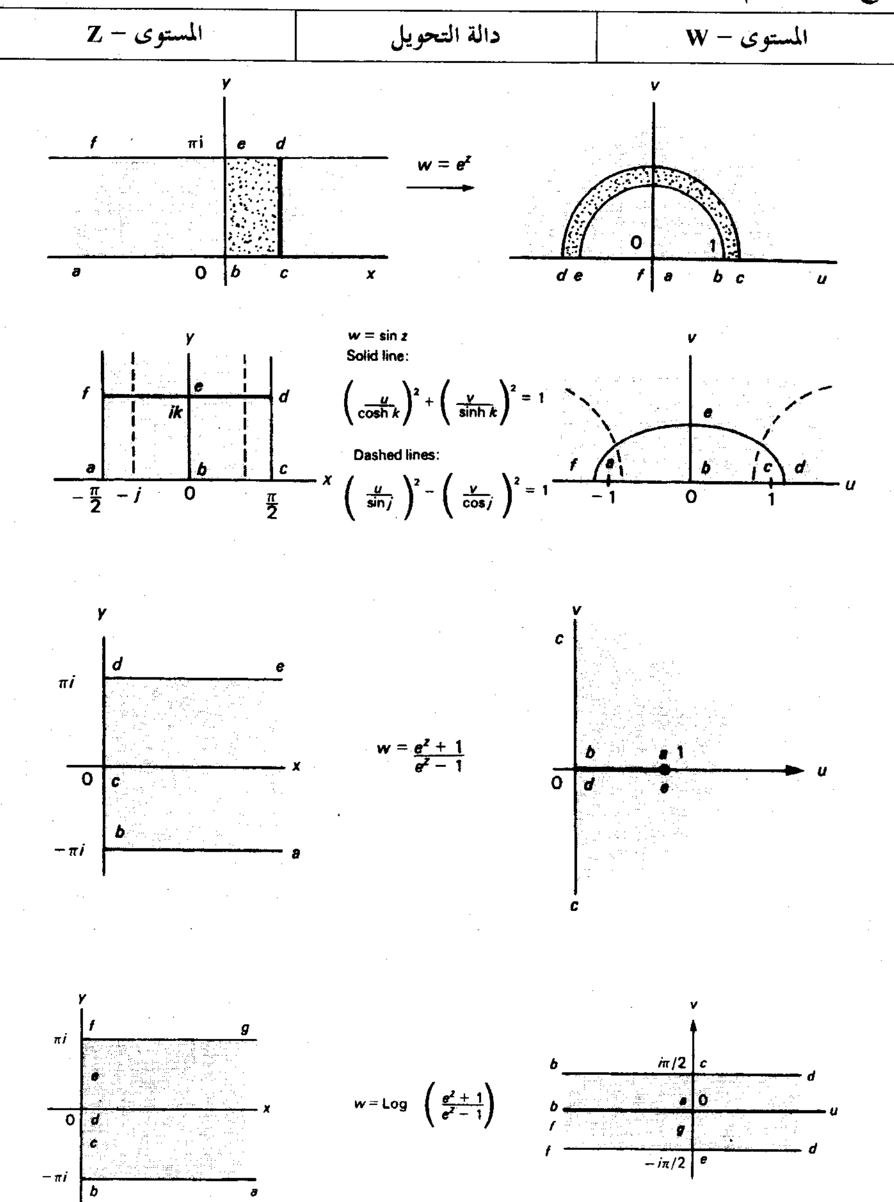
المستوى - Z	دالة التحويل	المستوى - W
	$w = i\dfrac{1-z}{1+z}$	
	$\left(\dfrac{w-1}{w+1}\right)^2 = i\dfrac{z-1}{z+1}$	
	$w = \operatorname{Log} z$	
	$w = \operatorname{Log} i\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)$	
	$z = \dfrac{\|\alpha\|}{\alpha}\left(\dfrac{w-\alpha}{1-\bar{\alpha}w}\right)$	

تابع الملحق رقم (١).

المستوى - W	دالة التحويل	المستوى - Z
	$w = \frac{1}{z}$	
	$w = \frac{1}{z}$	
	$w = z + \frac{1}{z}$ Dashed line: $\left(\frac{ku}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{kv}{k^2-1}\right)^2 = 1$	
	$w = z^{\pi/\theta}$	

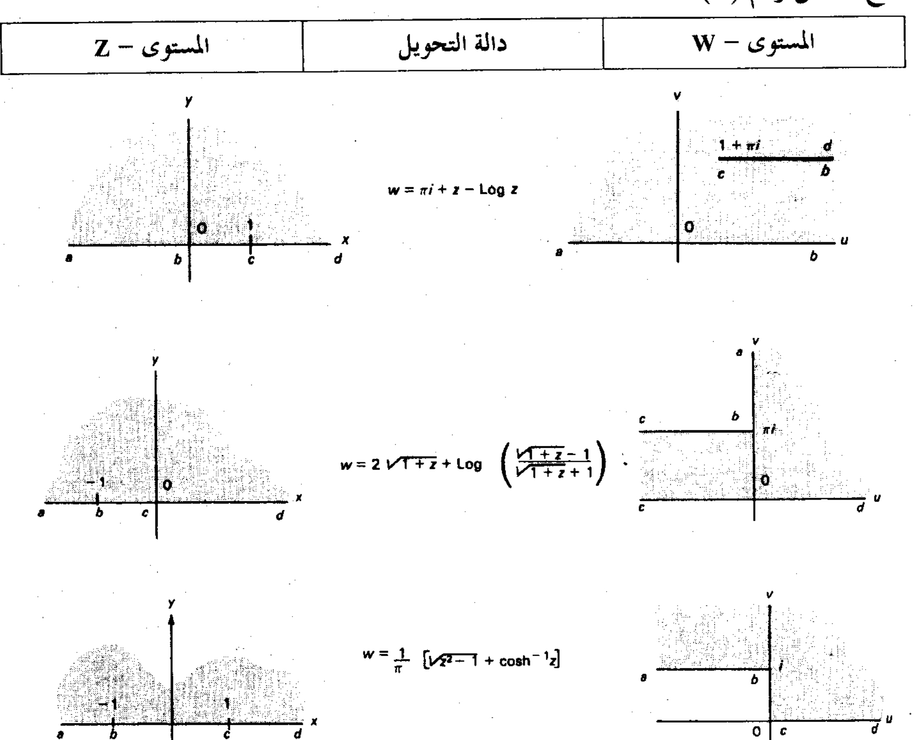
تابع الملحق رقم (١).

المستوى – W	دالة التحويل	المستوى – Z



تابع الملحق رقم (١).

المستوى − W	دالة التحويل	المستوى − Z



الملحق رقم (٢)

جـــــدول تحـويــلات لابــلاس

TABLE OF LAPLACE TRANSFORMS

$u(\phi)$	$\mathcal{L}\{u(\phi)\}(s)$	مجال التقارب
$\phi^z\,(\operatorname{Re} z > -1)$	$\Gamma(z+1)/s^{z+1}$	$\operatorname{Re} s > 0$
$e^{z\phi}$	$1/(s-z)$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} z$
$\sin z\phi$	$z/(s^2+z^2)$	$\operatorname{Re} s > \lvert \operatorname{Im} z \rvert$
$\cos z\phi$	$s/(s^2+z^2)$	$\operatorname{Re} s > \lvert \operatorname{Im} z \rvert$
$e^{w\phi}\sin z\phi$	$z/\left[(s-w)^2+z^2\right]$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} w + \lvert \operatorname{Im} z \rvert$
$e^{w\phi}\cos z\phi$	$(s-w)/\left[(s-w)^2+z^2\right]$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} w + \lvert \operatorname{Im} z \rvert$
$\phi \sin z\phi$	$2sz/(s^2+z^2)^2$	$\operatorname{Re} s > \lvert \operatorname{Im} z \rvert$
$\phi \cos z\phi$	$(s^2-z^2)/(s^2+z^2)^2$	$\operatorname{Re} s > \lvert \operatorname{Im} z \rvert$
$\sin^2 z\phi$	$2z^2/s(s^2+4z^2)^2$	$\operatorname{Re} s > 2\lvert \operatorname{Im} z \rvert$
$\cos^2 z\phi$	$(s^2+2z^2)/s(s^2+4z^2)$	$\operatorname{Re} s > 2\lvert \operatorname{Im} z \rvert$
$(e^{z\phi}-e^{w\phi})/\phi$	$\log\left[(s-w)/(s-z)\right]$	$\operatorname{Re} s > \max\{\lvert \operatorname{Re} z\rvert, \lvert \operatorname{Re} w \rvert\}$
$\sin z\phi/\phi$	$\tan^{-1} z/s$	$\operatorname{Re} s > \lvert \operatorname{Im} z \rvert$
$\sin^2 z\phi/\phi$	$\frac{1}{4}\log(1+4z^2/s^2)$	$\operatorname{Re} s > 2\lvert \operatorname{Im} z \rvert$
$e^{-z\phi^2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi/z}\,e^{s^2/4z[1-erf(s/2\sqrt{z})]}$	C
$\log \phi$	$(\log s - \gamma)/s, \gamma = 0.5772\ldots$	$\operatorname{Re} s > 0$

تابع ملحق رقم (٢).

$u(\phi)$	$\mathcal{L}\{u(\phi)\}(s)$	مجال التقارب
$H(\phi-a)$	e^{-as}/s	$\operatorname{Re} s>0$
$\dfrac{e^{a\phi}(1-2a\phi)}{\sqrt{\pi\phi}}$	$\dfrac{s}{(s-a)^{3/2}}$	$\operatorname{Re} s>0$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi\phi}}\cos(2\sqrt{a\phi})$	$\dfrac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$	$\operatorname{Re} s>0$
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi\phi}}\cosh(2\sqrt{a\phi})$	$\dfrac{e^{a/s}}{\sqrt{s}}$	$\operatorname{Re} s>0$
$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi\phi^3}}e^{-a^2/4\phi}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\operatorname{Re} s>0$
$1-\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a/2\sqrt{\phi}} e^{-v^2}dv$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{Re} s>0$

ومن أجل لائحة أكثر اتساعا لتحويلات لابلاس انظر [M, pp. 428-343]..

الملحق رقم (٣)

التكاملات الخطية ونظرية جرين

LINE INTEGRALS AND GREEN'S THEOREM

التكاملات الخطية تعميم طبيعي لمفهوم التكامل المحدود

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

يقدم باختصار هذا الملحق تطور التكاملات الخطية لدوال $f(x,y)$ ذات قيم حقيقية على منحنيات ملساء جزئياً في المستوى الإقليدي.

لا يعبر مصطلح التكامل الخطي عن المعنى الصحيح لأننا نحسب التكامل كما اعتدنا على طول المنحنيات. لفهم ما يفيد التكامل الخطي نتذكر أن التكامل المحدود في (1) يتم الحصول عليه بتقسيم الفترة $a \leq x \leq b$ إلى n من الفترات الجزئية أطوالها $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ ثم اختيار نقطة x_k في كل فترة جزئية وحساب نهاية مجموع ريمان عندها:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

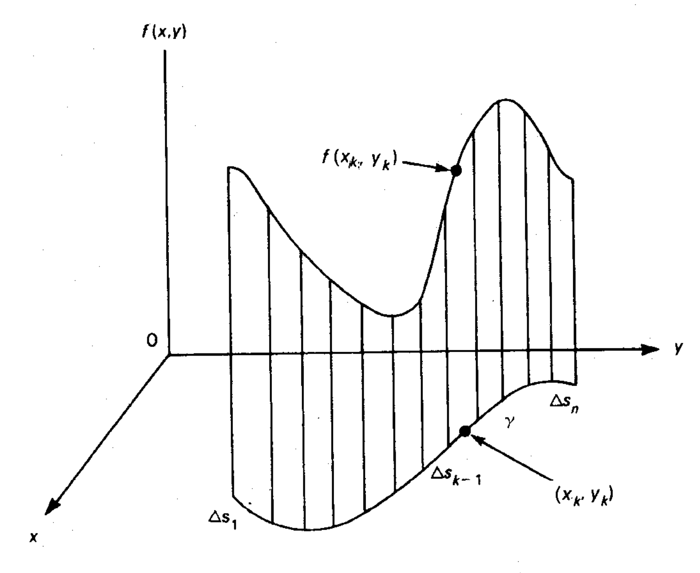
عندما تؤول جميع الأطوال Δx_k إلى الصفر.

يمكن اتباع طريقة مماثلة على دالة ذات قيم حقيقية $f(x,y)$ معرفة على منحنى أملس γ في المستوى الإقليدي ألا وهي:

قسّم γ إلى n من الأقواس الجزئية أطوالها : $\Delta s_1, \Delta s_2, ..., \Delta s_n$ ثم اختر (x_k, y_k) من كل قوس جزئي واحسب نهاية المجموع :

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta s_k \tag{2}$$

عندما تنتهي جميع أطوال الأقواس Δs_k نحو الصفر (انظر شكل (م -١)).



الشكل (م – ١). مجموع ريمان للتكامل الخطي.

بنفس الطريقة التي يمكن أن يفسر بها التكامل المحدود (1) على أنه المساحة تحت منحنى f من a إلى b فإن التكامل الخطي :

$$\int_{\gamma} f(x,y)ds = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k} f(x_k, y_k)\Delta s_k, \tag{3}$$

يمكن أن يفسر على أن المساحة تحت المنحنى f على طول γ.

من الممكن إثبات أنه إذا كانت f متصلة على المنحنى الأملس γ ، فإن النهاية في (3) تكون موجودة [B, p. 301]. بالفعل ستكون النهاية في (3) موجودة تحت شروط أكثر ضعفا (انظر [s]).

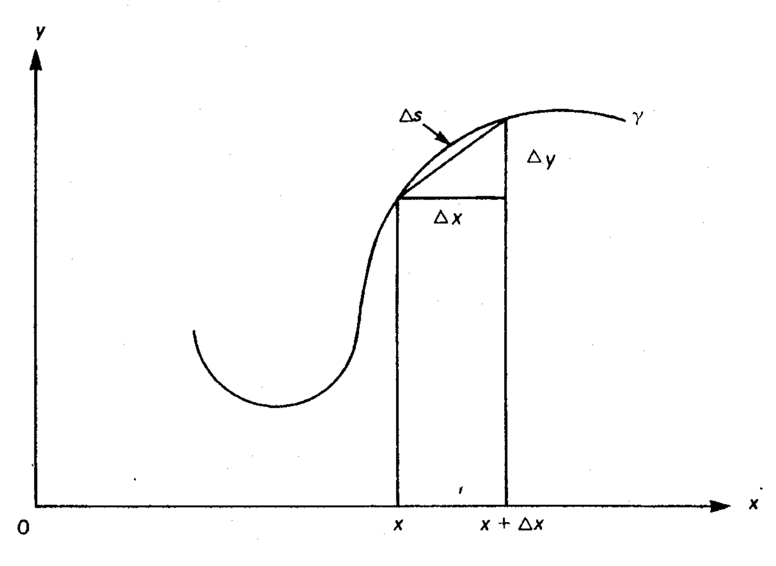
من النادر حساب التكاملات الخطية باستخدام مجموع ريمان من المعادلة (3). يوضح المثالان التاليان الطريقة المعتادة في معرفة حساب قيمة التكامل الخطي.

مثال (١ ,م(٣))

احسب :

$$\int_{\gamma} xyds$$

حيث γ هو القوس على طول $y = x^2$ من $(0,0)$ إلى $(1,1)$.



الشكل (م-٢). طول القوس.

الحل

من نظرية فيثاغورس (انظر الشكل (م ـ ٢)) يكون التغير في طول القوس Δs المقابل للتغير في المتحول المستقل من x إلى $x + \Delta x$ تقريبا هو:

$$(\Delta s)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

بقسمة الطرفين على $(\Delta x)^2$ وبأخذ النهاية عندما تؤول Δx إلى الصفر نحصل على:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \tag{4}$$

حيث $s(x)$ هي دالة طول القوس التي تقيس طول القوس على امتداد المنحنى γ ابتداءً من $[0,0]$ إلى (x, x^2). باستبدال المتغيرات ds وy بما يساويها نحصل على:

$$\int_\gamma xyds = \int_0^1 xy\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^3\sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

وبإجراء التعويض $u = 1+4x^2$ نجد أن:

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{32}\int_1^5 (u-1)\sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{u^{5/2}}{5} - \frac{u^{3/2}}{3}\right]_1^5$$

$$= \frac{5^{5/2}+1}{120}.$$

إذا كان المنحنى γ معطى وسيطي (بارامتري) أمكن إنجاز الحساب كما في المثال التالي.

مثال (٢,م(٣))

احسب قيمة التكامل الخطي:

$$\int_\gamma \sqrt{y}\,ds$$

حيث γ هو المنحنى الوسيطي (البارامتري):

$$x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

الحل

بإعادة كتابة المعادلة (4) على الشكل:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

وتحويل جميع المتغيرات في التكامل الخطي إلى دوال في t نجد أن:

$$\int_\gamma \sqrt{y}ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} \quad dt.$$

بتبسيط الجذر الثاني نحصل على:

$$\sqrt{1-2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{2-2\cos t.}$$

وبضرب الجذرين نحصل على:

$$\int_\gamma \sqrt{y}ds = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos t)dt$$
$$= \sqrt{2}(t - \sin t)\Big|_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi.$$

لا تعتمد قيمة التكامل الخطي $\int_\gamma f(x,y)ds$ على منحنى أملس قطعيا γ على التمثيل الوسيطي (البارامتري) للمنحنى γ. فأي تغيير في الوسيط (البارامتر) بالنسبة إلى المنحنى الأملس يتحدد بوساطة دالة تزايدية قابلة للاشتقاق باستمرار: $t = t(T)$ تصور الفترة $A \le T \le B$ على الفترة $a \le t \le b$.

وباستبدال المتغيرات، واستعمال السلسلة نحصل على:

$$\int_\gamma f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))s'(t)dt$$
$$= \int_A^B f(x(T),y(T))\frac{ds}{dt}\frac{dt}{dT}dT$$
$$= \int_A^B f(x(T),y(T))s'(T)dT$$

مثال (٣,٣م٣(٣))

أوجد قيمة التكامل الخطي

$$\int_{\gamma} x^3 ds$$

حيث γ هو النصف الأيمن من دائرة الوحدة.

الحل

لتوضيح حقيقة أن التكامل الخطي يكون مستقلا عن التمثيل الوسيطي (البارامتري) سنستخدم تمثيلين وسيطين (بارامترين) مختلفين للنصف الأيمن من دائرة الوحدة. من المهم أن يكون لكلا التمثيلين البارامتريين نفس الاتجاه الموجب على طول γ.

(i) ضع $y = t$ و $x = \sqrt{1-t^2}$ مع $-1 \le t \le 1$ نجد أن:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{و} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \text{ ، } \frac{dy}{dt} = 1$$

وبالتالي:

$$\int_{\gamma} x^3 ds = \int_{-1}^{1} (1-t)^2 dt$$

$$= t - \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

(ii) لتكن $x = \cos t, y = \sin t$ مع $-\pi/2 \le t \le \pi/2$ وبالتالي فإن:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

وأيضا:

$$\int_{\gamma} x^3 ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t \; dt = \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{3},$$

يوجد نوعان آخران من التكاملات الخطية يمكن تعريفهما بالنسبة للدالة $f(x,y)$ على طول γ. فإذا استبدلنا Δs_k بـ Δx_k أو Δy_k في المعادلة (3) فإننا نحصل على التكامل الخطي للدالة f على طول γ بالنسبة إلى x أو y:

$$\int_\gamma f(x,y)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_k f(x_k, y_k)\Delta x_k,$$

$$\int_\gamma f(x,y)dy = \lim_{\max \Delta y_k \to 0} \sum_k f(x_k, y_k)\Delta y_k,$$

يمكن النظر إلى هذين التكاملين الخطين على أنهما مسقطان للتكامل الخطي في (3) على المستوى xz- أو المستوى yz- على الترتيب (انظر الشكل (م- ٣)).

يكون حساب قيمة هذين التكاملين الخطيين مماثلا لتلك التي حسبناها أعلاه.

مثال (٤ ,م(٣))

أوجد قيمة:

$$\int_\gamma y(1-x)dy$$

على طول الجزء γ الذي يقع في الربع الأول من دائرة الوحدة.

الحل

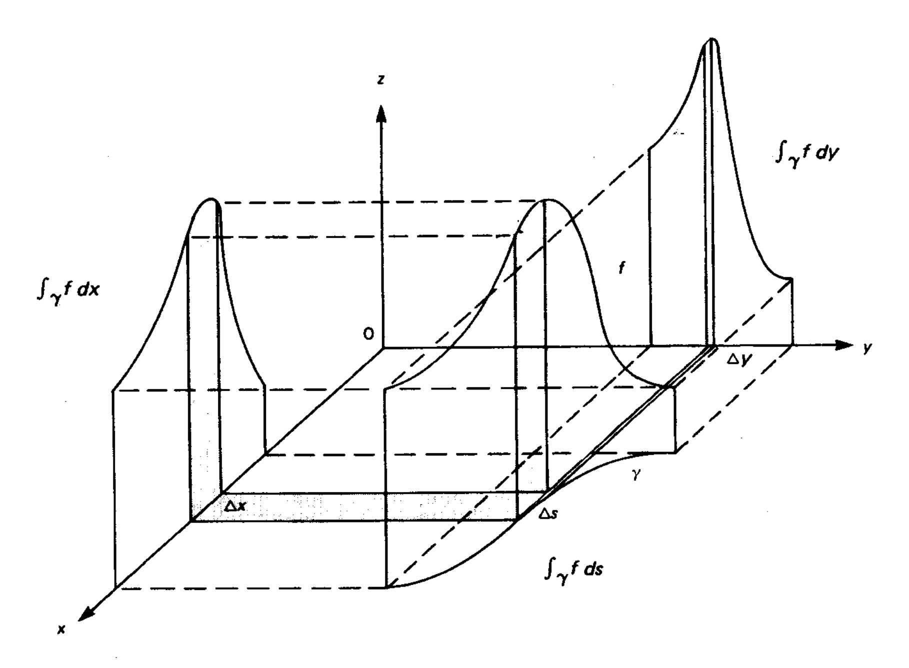
بالتعبير عن γ بوساطة المعادلات الوسيطية (البارامترية):

$$x = \cos t, y = \sin t, \ \ 0 \le t \le \pi/2,$$

نحصل على:

$$\int_\gamma y(1-x)dy = \int_0^{\pi/2} \sin t(1-\cos t)\cos t dt$$

$$= (\frac{1}{3}\cos^3 t - \frac{1}{2}\cos^2 t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}$$



الشكل (م – ٣). المساقط.

تظهر في التطبيقات التكاملات الخطية في التركيب:

$$\int_\gamma p(x,y)dy + \int_\gamma q(x,y)dx = \int_\gamma p(x,y)dy + q(x,y)dx, \qquad (5)$$

حيث تكون p و q دالتين منفصلتين في منقطة D تحوي المنحنى γ. وعندما يكون γ منحنيا مغلقا بسيطا وللدالتين p و q مشتقات جزئية متصلة في D فتوجد علاقة مهمة بين التكامل الخطي على طول γ والتكامل الثنائي على المنطقة G داخل γ.

نظرية جرين Green's theorem

لتكن G المنطقة داخل المنحنى γ المغلق البسيط جزئيا. إذا كانت $\partial q/\partial y$، $\partial q/\partial x$، $\partial p/\partial x$، $q(x,y)$ و $p(x,y)$ متصلة عند جميع نقاط $G \cup \gamma$ فإن:

$$\int_{\gamma} pdy + qdx = \iint_G \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} \right) dxdy,$$

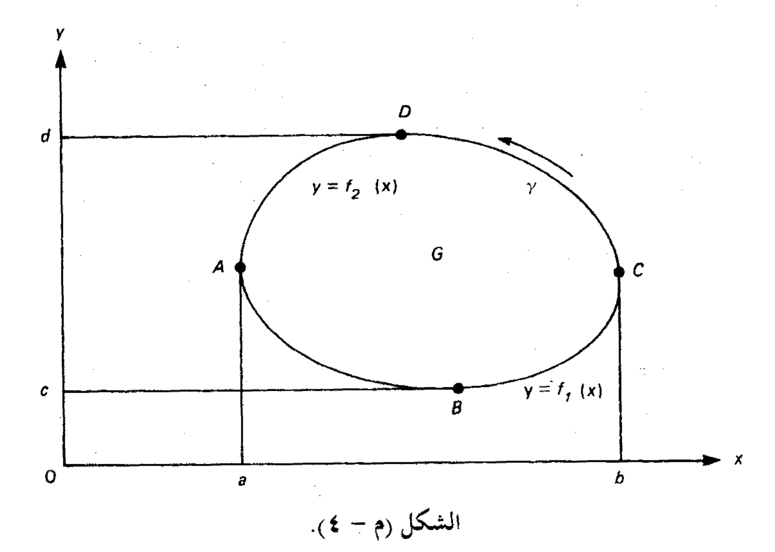
شرط أن نحسب التكامل الخطي في الاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) على طول γ.

البرهان

لنفترض مبدئيا أن γ له الخاصية: أي خط مواز لأي من المحاور يقطع γ على الأكثر في نقطتين. ارسم الخطين الرأسي والأفقي اللذين يحيطان بالمحنى γ (انظر شكل (م-٤)). وبذلك يمكن تعريف الأقواس ABC و CDA على طول γ بدوال وحيدة القيم للمتغير x في الفترة $a \leq x \leq b$ لنرمز لتلك الدوال بالرمز $y = f_1(x)$ و $y = f_2(x)$ على التوالي.

لاحظ التكامل الخطي:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} qdx &= \int_{ABC} qdx + \int_{CAD} qdx \\ &= \int_a^b q(x, f_1(x))dx - \int_a^b q(x, f_2(x))dx, \end{aligned}$$



الشكل (م - ٤).

حيث CDA تبدأ من اليمين إلى اليسار. بسبب وقوع المنطقة G بين المنحنين ABC و CDA نحصل على:

$$\iint_G -\frac{\partial q}{\partial y}dxdy = -\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial q}{\partial y}dydx$$

$$= -\int_a^b \left[q(x,y)\Big|_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} \right] dx$$

$$= \int_a^b \left[q(x, f_1(x)) - q(x, f_2(x)) \right] dx$$

وبالتالي:

$$\int_\gamma qdx = \iint_G -\frac{\partial q}{\partial y}dxdy$$

بالمثل يمكن تعريف الأقواس BCD وDAB بدوال وحيدة القيم $x = g_1(y)$ و $x = g_2(y)$ على الفترة $c \le y \le d$ مع:

$$\int_\gamma pdy = \int_c^d p(g_2(y), y)dy - \int_c^d p(g_1(y), y)dy$$

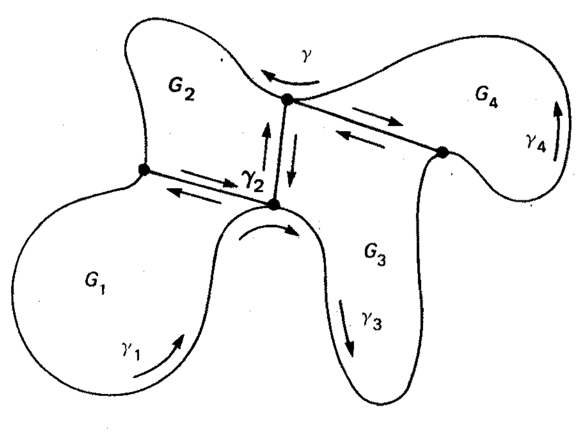
و:

$$\iint_G \frac{\partial p}{\partial x}dxdy = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial p}{\partial x}dxdy$$

$$= \int_c^d \left[p(x,y)\Big|_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)} \right] dy = \int_\gamma pdy.$$

يثبت هذا نظرية جرين للمنحنيات الخاصة التي في عين الاعتبار. يمكن تعميم نظرية جرين لمنحنيات لا تحقق هذه الخاصية وذلك بتقسيم المنطقة G إلى مناطق جزئية G_1 والتي لحدودها γ_i تلك الخاصية (انظر الشكل (م- ٥)).

مع أن هذا الجزء واضح ذهنيا من أمثلة كتلك التي في شكل (م-٥) فإنه يتطلب إثباتا صعبا أبعد من مدى هذا الكتاب.



الشكل رقم (م – ٥).

بتطبيق نظرية جرين على كل من المناطق الجزئية G_i وتجميعهم مع بعضهم ، نلاحظ أن التكامل الخطي على طول القوس الجزئي في γ_i الذي ليس بقوس جزئي من γ سوف يختصر في أزواج يسير كل قوس جزئي مرتين في اتجاه معاكس. وبالتالي يكون:

$$\iint_G \left(\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial y}\right)dxdy=\sum_i \iint_{G_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\sum_i \int_{\gamma_i} pdy+qdx$$

$$=\int_\gamma pdy+qdx \qquad \blacksquare$$

مثال (٥,م(٣))

احسب التكامل الخطي:

$$\int_\gamma (x-2y)dx+x\ dy,$$

حيث γ دائرة الوحدة، مستخدما نظرية جرين.

الحل

هنا $p(x,y)=x$ و $q(x,y)=x-2y$

وبالتالي:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial q}{\partial y}=-2$$

وتعطي نظرية جرين:

$$\int_\gamma (x-2y)dx+x\ dy=\iint_{x^2+y^2<1}[1-(-2)]dxdy=3\pi$$

حيث دائرة الوحدة لها مساحة تساوي π.

تمارين (م(٣))

في التمارين من (١) إلى (٨) احسب التكامل الخطي المعطى على طول المنحنيات المذكورة:

(١) $\int_\gamma x\ ds$ حيث γ الخط $y=x$ و $0\le x\le 2$.

(٢) $\int_\gamma x\ ds$ حيث γ المنحنى $y=x^2$ و $0\le x\le 1$.

(٣) $\int_\gamma yds$ حيث γ المنحنى $x^2=y^3$ و $0\le x\le 1$.

(٤) $\int_\gamma x^2y^2ds$ حيث γ دائرة الوحدة.

(٥) $\int_\gamma (x^2-y^2)dx-2xydy$ حيث γ المنحنى $y=x^2$ و $1\le x\le 1$

(٦) التكامل الخطي في (٥) حيث γ دائرة الوحدة.

(٧) $\int_\gamma xy\ dx+x^2dy$

حيث γ معرفة بـ $y=3t^2-2t$ ، $x=3t\text{-}1$ و $1\le t\le 2$

(٨) $\int_\gamma \frac{y^2}{1+x^2}dx+2y\tan^{-1}x\ dy,$

حيث γ المنحنى المغلق:

$$x^{2/3}+y^{2/3}=1$$

(٩) استخدم نظرية جرين لحساب تمرين (٦).

(١٠) استخدم نظرية جرين لحساب تمرين (٨).

(١١) بين أن المساحة المحدودة بالمنحنى البسيط جزئيا والمغلق γ يكون معطى بالتكامل:

$$\frac{1}{2}\int_{\gamma} xdy-ydx$$

(١٢) استخدم نظرية جرين لحساب التكامل الخطي

$$\int_{\gamma} 2xy\ dx+(x^2+y^2)dy$$

حيث γ أي منحنى بسيط مغلق.

(١٣) بين أن:

$$\int_{\gamma} pdy+qdx=0$$

لأي منحنى بسيط جزئيا مغلق γ إذا كان كل من q ، p و $\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y}$ متصلة على وداخل γ.

(١٤) لتكن $(\bar{x},\bar{y})$ إحداثيات مركز ثقل منطقة G المحدودة بالمنحنى البسيط جزئيا والمغلق γ.

فأثبت:

$$\bar{x}=\frac{1}{2A}\int_{\gamma} x^2dy \quad , \quad \bar{y}=\frac{-1}{2A}\int_{\gamma} y^2dx$$

حيث A مساحة G.

(١٥) بين مستخدما الصيغة المذكورة في تمرين (١٤) أن:

$$A\bar{y}=\int_{\gamma} xy\ dy$$

هل $\int_{\gamma} xy\ dx$ يمكن أن تكتب بدلالة $\bar{x}$.

(١٦) مستخدما الصيغة في تمرين (١٤) أثبت أن :

$$\iint_G \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)dxdy=\int_{\gamma} \frac{dF}{dn}ds$$

حيث إن $\frac{dF}{dn}$ الاشتقاق الاتجاهي للدالة F في الاتجاه العمودي الخارجي للمنحنى γ.

(١٧) أثبت أن :

$$\iint_G \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)dxdy=\int_{\gamma} f\ dg.$$

إجابات الأسئلة الفردية

SOLUTIONS TO ODD NUMBERED PROBLEMS

الفصل الأول

تمارين (١ , ١)

(١) $2+i$ ، $-2+i$ ، $2i$ ، $\frac{1}{2}i$.

(٣) $1+2i$ ، 1 ، $-1+i$ ، $1-i$.

(٥) 2 ، $2i$ ، i .

(٧) $7+i$ ، $3-i$ ، $10+5i$ ، $2-i$.

(٩) $7-i$ ، $-1-3i$ ، $14-5i$ ، $\frac{10}{17}-\frac{11}{17}i$.

(١١) $5+4i$ ، $3+6i$ ، $9+i$ ، $-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}i$.

(١٣) $-2i$.

(١٥) $3-4i$.

(١٧) $\frac{-7}{10}-\frac{19}{10}i$.

(١٩) -10 .

(٢١) $iz = ix - y$.

(٢٣) إذا كانت $z_2 \neq 0$ ، فإن $z_2\bar{z}_2$ (= مربـع طـول z_2) $z_2 \neq 0$ ولكـن $z_1z_2\bar{z}_3 = 0$ ،

لذا نقسم كلا من الطرفين على مربع طول z_2 لنحصل على $z_1 = 0$.

(٢٥) $\text{Im } z_1 = -\text{Im } z_2$ لـــذا $\text{Im } z_1z_2 = \text{Im } z_2$. $(\text{Re } z_1 - \text{Re } z_2) = 0$. إذا كانـت $\text{Re } z_1 = \text{Re } z_2$ فإن $\text{Re } z_1z_2 > 0$. إذن $\text{Im } z_2 = 0$.

(٢٧) $(x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2) = (x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2)$.

(٢٩) $\dfrac{x_1 \pm iy_1}{x_2 \pm iy_2} \cdot \dfrac{x_2 \mp iy_2}{x_2 \mp iy_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \pm i\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

(٣١) $(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B) = -b + 3ABw$.

$$AB = \sqrt[3]{\frac{b^2}{4} - D^2} = \frac{-a}{3}$$

لذا

$$w^3 + aw + b = (w - A - B)\ (w^2 + (A + B)w + a) + (A + B)^2) \ .$$

حيث

$$(A + B)^2 - 4[a + (A + B)^2] = -3(A - B)^2 \ .$$

(٣٣) استخدم قانون المبادلة والمصاحبة والتوزيع للأعداد الحقيقية لتحقيق أن الجمع والضرب المركب تحقق أيضا هذه الخواص. وقوانين التطابق والمعكوس قد بينت في هذا الكتاب.

(٣٥) افترض أن كلا من z_1 و z_2 مضروبات عكسية للعدد z . إذن $z_1z = 1 = zz_2$ ، $z_1 = z_1(zz_2) = (z_1z)z_2 = z_2$.

تمارين (١,٢)

(١) 1 ، $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ ، $\cos(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k) + i\sin(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k)$.

(٣) $\sqrt{2}$ ، $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$ ، $\sqrt{2}[\cos(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k) + i\sin(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k)]$.

(٥) 5 ، $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)+2\pi k \approx 0.6435+2\pi k$ ،

$5[\cos(\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)+2\pi k)+i\sin(\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)+2\pi k)]$.

(٧) $\sqrt{53}$ ، $\tan^{-1}\left(\frac{7}{2}\right)+2\pi k \approx 1.2925+2\pi k$ ،

$\sqrt{53}[\cos(\tan^{-1}\left(\frac{7}{2}\right)+2\pi k)+i\sin(\tan^{-1}\left(\frac{7}{2}\right)+2\pi k)]$.

(٩) $\sqrt{29}$ ، $\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)+2\pi k \approx 0.3805+2\pi k$ ،

$\sqrt{29}[\cos(\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)+2\pi k)+i\sin(\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)+2\pi k)]$.

(١١) $256(-1+i)$.

(١٣) -2^{18} .

(١٥) $2^{13}(-\sqrt{3}+i)$.

(١٧) $\sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$ ، $\sqrt[4]{2}(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8})$.

(١٩) $\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$ ، $\sqrt{2}(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12})$.

(٢١) $\sqrt[3]{2}(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9})$ ، $\sqrt[3]{2}(\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9})$ ،

$\sqrt[3]{2}(\cos\frac{13\pi}{9}+i\sin\frac{13\pi}{9})$.

(٢٣) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

(٢٥) $|z-i|+|z-1|=2$ ، $3x^2+2xy+3y^2-4x+4y=0$.

(٢٧) $||z-a|-|z-b||=c$.

(٢٩)
$$|z_1-z_2|^2-|z_2-z_3|^2=$$
$$[|z_1|^2+|z_2|^2-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1]-[|z_2|^2+|z_3|^2-z_2\bar{z}_3-z_3\bar{z}_2]=$$
$$-\bar{z}_2(z_1-z_3)-z_2(\bar{z}_1-\bar{z}_3)=(\overline{z_1+z_3})(z_1-z_3)+(z_1+z_3)(z_1-z_3)=$$
$$|z_1|^2-|z_3|^2-\bar{z}_1z_3+\bar{z}_3z_1+|z_1|^2-|z_3|^2+z_3\bar{z}_1-z_1\bar{z}_3=0$$

(٣١) $|z_1|-|z_2|=|(z_1-z_2)+z_2|-|z_2|\leq|z_1-z_2|+|z_2|-|z_2|=|z_1-z_2|$.

بالمثل $|z_2|-|z_1|\leq|z_1-z_2|$.

(٣٣)
$$|z_1\pm z_2|^2=(\bar{z}_1\pm\bar{z}_2)(z_1\pm z_2)=|z_1|^2+|z_2|^2\pm(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_2z_1)$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2\pm 2\operatorname{Re} z_1\bar{z}_2$$

(٣٥) $|z-a|^2=|z|^2+|a|^2-2\operatorname{Re} z\bar{a}$ ، $|1-az|^2=1+|a|^2|z|^2-2\operatorname{Re} z\bar{a}$

و $0<(1-|z|^2)(1-|a|^2)=1-|z|^2-|a|^2+|a|^2|z|^2$.

(٣٧) $P(\bar{z}_0)=\overline{P(z_0)}=\bar{0}=0$.

(٣٩) $|z|^n(\cos n\theta+i\sin n\theta=z^n=1=\cos 2\pi k+\sin 2\pi k$.

لذا $|z|=1$ و $\theta=2\pi k/n$ ولكن $\frac{2\pi k}{n}+2\pi=\frac{2\pi(k+n)}{n}$ لذا $z_{k+n}=z_k$.

(٤١) $1+z+\cdots z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}=0$

لأي جذر نوني للواحد z_k حيث $z_k^n=1$. بما أن العدد n الأول من الجذور النونية للوحدة كلها مختلفة (انظر تمرين ٣٩) وكثيرة الحدود $(1-z^n)$ لها بالتمام n من الجذور، واحد منهم هو 1 فإن $1+z+\cdots+z^{n-1}$ يجب أن يكون له كل من الجذور النونية الأخرى للوحدة كجذر له.

(٤٣)
$$0\leq\sum_k(|a_k|^2-2|a_kz_k|\lambda+|z_k|^2\lambda^2)=\sum_k|a_k|^2-\frac{\sum_k|a_kz_k|}{\sum_k|z_k|^2}$$
$$+\left(\sum_k(|a_k|^2\right)-\left(\lambda-\frac{\sum_k|a_kz_k|}{\sum_k|z_k|^2}\right)$$

بعد ذلك ضع $\lambda = \sum_k |a_k z_k| \ / \ \sum_k |z_k|^2$.

(٤٥)
$$|(1-z)p(z)| \geq a_0 - [(a_0 - a_1) + |z| + (a_1 - a_2)|z|^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)|z|n + a_n |z|^{n-1}]$$

ويحدث التساوي عندما وفقط عندما $z \geq 0$ (انظر التمرين (٣٦)).

$p(1) \neq 1$ و $|(1-z)p(z)| > 0$ للنقاط المتبقية من $|z| \leq 1$.

تمارين (١,٣)

(١) مفتوحة، محدودة، مترابطة ببساطة.

(٣) مفتوحة، غير محدودة، ليست مترابطة.

(٥) مغلقة، غير محدودة، مترابطة ببساطة.

(٧) مغلقة، غير محدودة، مترابطة ولكن ليست بسيطة الترابط.

(٩) مفتوحة، محدودة، مترابطة ولكن ليست بسيطة الترابط.

(١١) الدائرة $|z + 3| = 2$ ؛ خطان $\operatorname{Im} z = \pm 1$ ؛ القطع المكافئ $|z| = \operatorname{Re} z + 2$ ؛ القطع الناقص $|z + 1| + |z + i| = 2$ ؛ قطاعان ناقصان $|z - 1| + |z + 1| = 3$ و $|z - 1| + |z + 1| = 2\sqrt{2}$.

(١٣) لتكن $s_1, s_2, \ldots, s_n$ مجموعات مغلقة إذن $C - s_k$ مفتوحة. ولكن $\cap_k (C - s_k) = C - U_k s_k$ مفتوحة.

(١٥) إذا كانت $z \in U_\alpha s_\alpha$ بحيث إن كلا من s_α مفتوحة، فإن z نقطة داخلية لمجموعة ما s_α. إذن يكون جوار ε– للنقطة z محتواه في s_α وبالتالي في $U_\alpha s_\alpha$.

(١٧) افترض أن الإغلاق $\overline{S}$ غير مترابطة. إذن يوجد مجموعات مفتوحة H,G بحيث إن $\overline{S} \subset G \cup H$، $G \cap H$ فارغة و $H \cap \overline{S}$ ليست فارغة. وبما أن S

مترابطة فإنها تقع في مجموعة واحدة من هذه المجموعات، لتكن G مثلا. إذن S موجودة في مجموعة مغلقة $S \cap H$ لذا $\bar{S} \cap H$ فارغة، تناقض.

(١٩) $z = 0$.

(٢١) $z = \infty$ ، لا تملك نقاط تراكم.

تمارين (١,٤)

(١) $|2z-2| = 2|z-1| < 2\delta$ لذا ضع $\varepsilon = 2\delta$.

(٣) $|z+i| < \delta$ لذا ضع $\varepsilon = \delta$.

(٥) $|(2z-3)-(-1+2i)| = |2z-2-2i| = 2|z-(1+i)| < 2\delta = \varepsilon$.

(٧) مغلقة $\left|\dfrac{z^2-4}{z-2} - 4\right| = \dfrac{|z^2-4z+4|}{|z-2|} = |z-2| < \delta = \varepsilon$.

(٩) $\left|\dfrac{z^3-1}{z-1} - 3\right| = \dfrac{|z^3-3z+2|}{|z-1|} = |z^2+z-2| = |(z-1)^2+3(z-1)| < \delta(\delta+3)$.

ليكن $\delta<1$ واختر $\varepsilon = 4\delta$.

(١١) $|\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} a| = |\operatorname{Re}(z-a)| \le |z-a| < \delta = \varepsilon$

لذا $\lim\limits_{z\to a} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} a$.

(١٣) $|\bar{z} - \bar{a}| = |z-a| < \delta = \varepsilon$ لذا $\lim\limits_{z\to a} \bar{z} = \bar{a}$.

(١٥) $\lim \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re}(\lim\limits_{z\to a} f(z)) = \operatorname{Re} f(a)$.

(١٧) $||f(z)| - |f(a)|| \le |f(z)-f(a)| < \varepsilon$.

(١٩) $\dfrac{3}{2} = \lim\limits_{z\to\pm1} \dfrac{z^2+z+1}{z+1} = \lim\limits_{z\to\pm1} \dfrac{z^3-1}{z^2-1}$ عندما $z=1$، غير معرفة عندما $z=-1$.

(٢١) $f(z) = \bar{z}\ , z \neq 0$ لذا الدالة متصلة في $C-\{0\}$ بوساطة تمرين (١٣). بما أن $\lim \bar{z} = 0$ نعرف $f(0) = 0$ حتى تكون f متصلة في C.

(٢٣) $f(z) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ دالة متصلة في $C-\{0\}$ لأنها خارج قسمة دالتين متصلتين ولها مقام ليس بالصفر. النهاية $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ لا توجد لأننا نحصل على 1 عندما نقترب على امتدد المحور الحقيقي، 1− على امتداد المحور التخيلي. إذن لا يمكن أن نجعل الدالة متصلة عند $z = 0$.

(٢٥) $czw + dw = az + b$ لذا $z = \dfrac{b - dw}{cw - a}$ لقيم $z \neq -d/c$ و $w \neq a/c$. النقطة $-d/c$ تصور إلى ∞ و ∞ تصور إلى a/c.

(٢٧) $|\, p(z) \,| > |\, a_0 \,| - [\,|\, a_1 \,| + \cdots + |\, an \,|\,] \geq 0$ في $|\, z \,| < 1$.

تمارين (٥ , ١)

(١) $-if_y = e^x (\cos y + i \sin y) = f_x$.

(٣) $-ify = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = f_x$.

(٥) $54z^2 - \dfrac{z}{2} + 4$.

(٧) $\dfrac{-2}{(z-1)^2}$.

(٩)
$$[f(z+h) \pm g(z+h))] - [f(z) \pm g(z)] = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \pm \frac{g(z+h) - g(z)}{h}$$

(١١) $(P/Q)' = (QP' - PQ')/Q^2$.

(١٣) $f_x = 1$ ولكن $-if_y = 0$.

(١٥) $f_x = \dfrac{x}{|z|}$ و $-if_y = \dfrac{-iy}{|z|}$ لقيم $z \neq 0$ ، والنهاية $\lim_{z\to 0}\dfrac{|z|}{z}$ غير موجودة لأنها تقترب من 1 عندما $z \to 0$ على امتداد جزء المحور الحقيقي الموجب وتقترب من -1 عندما $z \to 0$ على امتداد جزء المحور الحقيقي السالب.

(١٧) $f_x = 2x$ ولكن $-if_y = 0$ ، لذا الدالة لها مشتقات فقط على امتداد المحور التخيلي لأن

$$f'(iy) = \lim_{z\to 0}\frac{f(z+iy)-f(iy)}{z} = \lim\frac{(\operatorname{Re} z)^2}{z} = 0$$

لأن $\in = \delta < |z| < \dfrac{|\operatorname{Re} z|^2}{|z|}$.

(١٩) $f_x = y$ ولكن $-if_y = 2y - ix$ ، لذا f يمكن أن يكون لها مشتقة فقط عند $z = 0$ ، حيث $f'(0) = \lim_{z\to 0}\dfrac{z \cdot \lim z}{z} = 0$.

(٢١) استخدام قاعدة السلسلة في التمرين (٢٠).

(٢٣) $rv_r = r(v_x x_r + v_y y_r) = xv_x + yv_y = -xu_y + yu_x = -u_\theta$

لأن $x_\theta = -y$ و $y_\theta = x$. بالمثل للمتطابقات الأخرى.

تمارين (٦, ١)

(١) انظر حل تمرين (١) من تمارين (١,٤) وطبق النظرية على شروط كافية للتحليلية (analyticity).

(٣) انظر حل التمرين (٣) من تمارين (١,٤)، وطبق النظرية على الشروط الكافية للتحليلية.

(٥)
$$\begin{aligned}-if_y = {} & 2[x\cos(x^2-y^2)\cosh 2xy + y\sin(x^2-y^2)\sinh 2xy] \\ & +2i[y\cos(x^2-y^2)\cosh 2xy - x\sin(x^2-y^2)\sinh 2xy] = f_x\end{aligned}$$

ثم طبق النظرية على الشروط الكافية للتحليلية.

(٧) $\frac{(y^2-x^2)+2ixy}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\cosh\frac{y}{x^2+y^2} = -if_y$.

$-\frac{2xy+i(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)2}\sin\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\sinh\frac{y}{x^2+y^2} = f_x$

يتحقق لقيم $z \neq 0$ ، حاصلين على شروط كافية للتحليلية عندما $z \neq 0$.

(٩) $\frac{f(z)}{z} = \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2$ لها القيمة 1 على المحور الحقيقي و 1− على المحور التخيلي ، إذن ليس لها مشتقة عند $z = 0$. ولكن $u = \frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}$ و $v = \frac{y^3-3x2y}{x^2+y^2}$ تحقق $u_x = 1 = v_y$ و $0 = -v_x$ عند $z= 0$.

(١١) $\mathrm{Im}(f+\bar{f}) = 0$ ، $f+\bar{f}$ تحليليـــة ، إذن نظـريـــة المشتقـــة الصفريـــة (Zero derivative theorem) تـؤدي إلى أن $(f+\bar{f} = 2\,\mathrm{Re}\, f)$ تســاوي ثابت ، وحينئذ f تكون دالة ثابتة.

(١٣) معادلتا كوشي ريمان تعطي المعادلات

$$2uu_x + u_y = 0$$
$$u_x - 2uu_y = 0$$

إذا كانت $1+4u^2 \neq 0$ ، فإن $u_x = u_y = 0$.

(١٥) $\mathrm{Im}\, f= 0$ ، لذا طبق نظرية المشتقة الصفرية.

(١٧) إذا كانت $f'=f_x= x$ ، فإن $f = \frac{x^2}{2} + g(y)$ ، ولكن $f' = -if_y = -ig'$ ليست دالة في x.

تمارين (١,٧)

(١) 1 .

(٣) $\frac{e^{-1}}{\sqrt{2}}(1+i)$.

(٥) i .

(٧) i .

(٩) $2\pi k - i\log 2$ ، $k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$.

(١١) ±1 ، $\pm i$.

(١٣) $2^{14}(1+i)$.

(١٥) 2^{18} .

(١٧) $2^{15}i$.

(١٩) $-2^{13}(1+\sqrt{3}i)$.

(٢١) استخدم المتطابقة في الحل للمسألة (٤١) بتمارين (١,٢) لتحصل على $\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}/\sin\frac{x}{2}$.

(٢٣) $\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}/\sin\frac{x}{2}$.

(٢٥) استخدم المسألة (٢١) بتمارين (١,٥).

(٢٧) $\mathrm{Re}\,w < 0, \mathrm{Im}\, w = 0\}$ $\{e^{-\pi} < |w| < e^{\pi}\}$.

(٢٩) $f(z) = e^{2\pi z}$.

تمارين (١,٨)

(١) $i(e \quad e^{-1})/2$.

(٣) $\frac{(e+e^{-1})}{2}\cos 1 + i\frac{(e-e^{-1})}{2}\sin 1$.

(٥) $\frac{(e+e^{-1})}{2}\cos 1 - i\frac{(e-e^{-1})}{2}\sin 1$.

(٧) $(e^{-1}-e)/2$.

(٩) $e^{2iz}=i$ ، لذا $z=\frac{\pi}{4}+\pi k$ ، $k=0,\pm1,\pm2,...$.

(١١) $e^{z}=2\pm\sqrt{3}$ ، لذا $z=\log|2\pm\sqrt{3}|+2\pi ki$ ، $k=0,\pm1,\pm2,...$.

(١٣) لا ، لأن $e^{z}\neq 0$.

(١٥) $\overline{e^{iz}}+\overline{e^{-iz}}=e^{-i\bar{z}}+e^{i\bar{z}}$.

(١٧) $\frac{e^{iz_1}e^{-iz_2}+e^{-iz_1}e^{iz_2}}{2}=\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2}\cdot\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}+\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}\cdot\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_2}}{2}$.

(١٩) $\frac{(e^{iz}+e^{-iz})}{2}\cdot\frac{2(e^{iz}-e^{-iz})}{2i}=\frac{(e^{2iz}-e^{-2iz})}{2i}$

و $\left(\frac{(e^{iz}-e^{-iz})}{2i}\right)^2\cdot\left(\frac{(e^{iz}+e^{-iz})}{2}\right)^2=\frac{e^{2iz}+e^{-2iz}}{2}$

والمتطابقة الأخيرة تأتي من تعريف الدالة $\tan 2z$.

(٢١) استخـــــــــدم المتطـــــابقــــات $\cos z=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$ و $\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$.

(٢٣) $(e^{z}+e^{-z})^2-(e^{z}-e^{-z})^2=4$ والأخيرتين تأتي من التعريف.

(٢٥) $(e^{z_1}+e^{-z_1})(e^{z_2}+e^{-z_2})+(e^{z_1}-e^{-z_1})(e^{z_2}-e^{-z_2})=2(e^{z_1}e^{z_2}+e^{-z_1}e^{-z_2})$

(٢٧) استخدم التمارين (٢٠)، (٢١) و (٢٦).

(٢٩) استخدم صيغة خارج القسمة للاشتقاق والتمرين (٢٨).

(٣١) استخدم تمرين (٢٦) ومواضع الجذور للدوال $\sin z$ و $\cos z$.

(٣٣) أضف التعاريف للدوال $\cos z$ و $i \sin z$.

(٣٥) القطعة المستقيمة $t + iy$ و $|t| < \frac{\pi}{2}$ تصور فوق نصف المستوى العلوي للقطع الناقص $\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\sinh^2 y} = 1$ لكل $y > 0$.

القطعة المستقيمة $x + it$ ، $t > 0$ تصور فوق نصف المستوى العلوي للقطع الزائدي $\frac{u^2}{\sin^2 x} + \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1$ ، واقعة في نفس مربع القطعة المستقيمة.

(٣٧) استخدم نفس الطريقة مثل ما في التمارين (٣٤-٣٦) لتبين أن الشريحة $0 < x < \pi, y > 0$ تصور فوق نصف المستوى العلوي. إذن اعتبر العمل على النصف الآخر من الشريحة.

تمارين (١,٩)

(١) $i \arg i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

(٣) $i \arg(-1) = i(\pi + 2\pi k), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

(٥) $e^{-\arg i} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

(٧) $i\frac{\pi}{2}$.

(٩) $e^{-\pi/2}$.

(١١) لقيم a الحقيقية، غير السالبة، حيث $f(0) = 1$ عندما $a = 0$ و $f(0) = 0$ وما عدا ذلك، تكون الدالة تحليلية شاملة لقيم $a = 0$ و $a \geq 1$.

(١٣) $\log|z_1| + i \arg z_1 + \log|z_2| + i \arg z_2 = \log|z_1 z_2| + i \arg(z_1 z_2)$.

(١٥) $a\log z+b\log z=(a+b)\log z$.

(١٧) $\log i=\dfrac{\pi i}{2}\,,\ \log(-1-i)=\log\sqrt{2}-\dfrac{3\pi i}{4}$.

ولكن $\log\dfrac{-1-i}{i}=\log(-1+i)=\log\sqrt{2}+\dfrac{3\pi i}{4}$

(١٩) $\log z^{a}=\log(e^{a\log z})=a\log z$ لأن الدالتـــان الأســـية واللوغاريتميـــة متعاكستان.

(٢١) لتكـــن $z=\cos w=(e^{iw}+e^{-iw})/2$ ، فإن $e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0$ لها الجذور $e^{iw}=z+(z^{2}-1)^{1/2}$ حيث دالة الجذر التربيعي تنقل $[C-\{0\}]^{2}$ إلى $C-\{0\}$.

(٢٣) دع $z=\cot w=i(e^{iw}+e^{-iw})/(e^{iw}-e^{-iw})$ فإن $e^{2iw}=\dfrac{z+i}{z-i}$.

(٢٥) إذا كانت $z=\cosh w=\dfrac{1}{2}(e^{w}+e^{-w})$ فـإن $e^{w}=z+(z^{2}-1)^{1/2}$ حيـث إن الجذر التربيعي له قيمتان.

(٢٧) إذا كانت $z=\sin w$ ، فإن $\dfrac{dw}{dz}(1-\sin^{2}w)^{1/2}=\cos w\dfrac{dw}{dz}=1$.

(٢٩) إذا كانت $z=\tan w$ فإن $(1+\tan^{2}w)\dfrac{dw}{dz}=\sec^{2}w\dfrac{dw}{dz}=1$.

(٣١) لتكن $z=\cosh w$ فإن $(\cosh^{2}w-1)\dfrac{dw}{dz}=\sinh w\dfrac{dw}{dz}=1$.

(٣٣) $z^{k/2}$ تصور $[C-\{0\}]^{2}$ فوق $[C-\{0\}]^{k}$ لقيم $k=1,3$ لـذا مـدى الفضـاءات مختلف لقيم $z^{1/2}$ و $z^{2/3}$ إذن $(-1)^{1/2}\neq(-1)^{3/2}$.

تمارين (١,١٠)

(١) $E_{R_0}=rA\operatorname{Re}e^{iwt}$ ، $E_{R_1}=rs^{2}\operatorname{Re}e^{i(wt-\alpha)}$ ، $E_{R_2}=r^{3}s^{2}\operatorname{Re}e^{i(wt-2\alpha)}$ ، … ، $E_{R_n}=r^{2n-1}s^{2}A\operatorname{Re}e^{i(wt-n\alpha)}$.

لذا

$$E_{reflected} = \left(1-\frac{s^2}{r^2}\right)E_{R_0} + \frac{s^2 A}{r}\operatorname{Re}\left\{e^{iwt}\sum_{n=0}^{\infty}(r^2 e^{-i\alpha})^n\right\}.$$

$$= \left(1-\frac{s^2}{r^2}\right)E_{R_0} + \frac{1}{r}E_{transmitted} = \left(2-\frac{1}{r}\right)A\cos wt + \frac{(1-r^2)A\cos(wt-\beta)}{r\sqrt{1+r^4-2r^2\cos\alpha}}$$

إذن اكتب $\cos(wt-\beta) = \cos wt\cos\beta + \sin wt\sin\beta$ وضعها في الصورة

$A^*\cos(wt-\gamma)$ باختيار

$$\cot\gamma = \frac{[(2r-1)\sqrt{1+r^4-2r^2\cos\alpha}+(1-r^2)\cos\beta]}{(1-r^2)\sin\beta}.$$

(٣) $$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = f''(ct+x) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

الفصل الثاني

تمارين (٢,١)

(١) $x = a\cos t, y = b\sin t$.

(٣) على سبيل المثال

$$z(t) = \begin{cases} t, 0\le t\le 1 \\ 2-t+i(t-1), & 1\le t\le 2 \\ i(3-t) & 2\le t\le 3 \end{cases}.$$

(٥) $$z(t) = \begin{cases} 2+e^{i\pi(1+2)}, & -3\le t\le -1 \\ -t, & -1\le t\le 1 \\ -2+e^{i\pi(t+1)}, & 1\le t\le 3 \end{cases}.$$

(٧) $(1-i)/2$ ، $(i-1)/2$ ، 1 .

(٩) $iR^2\pi$ ، $-R^2\pi$ ، $2\pi iR^2$.

(١١) ضع $z = e^{it}$ ، $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ فإن $\int_\gamma ydz = i\int_0^{\pi/2} \sin te^{it}dt = -\frac{\pi}{4}+\frac{i}{2}$

(١٣) $f(z) = y$ ليست مشتقة لدالة تحليلية.

(١٥) $e \quad e^{i}$.

(١٧) $e \quad e^{i}$.

(١٩) $(\cos a \quad \cosh a) / a$.

(٢١) $dt = \pm\int_0^{2\pi} \frac{z'(t)dt}{\sqrt{(z'(t))^2}} \int_0^{2\pi}$.

(٢٣) $2 - \pi i$ و $2 + \pi i$.

تمارين (٢,٢)

(١) ضع $z = e^{it}$ لتحصل على $0 = \int_{-\pi}^{\pi} tdt -$.

لقيم $0 \le \arg z \le 2\pi$ نحصل على $-2\pi^2$.

(٣) $\int_{\partial G} ydx + iydy = \iint_G -dxdy = -A$.

(٥) $0 = \int_\gamma e^z dz = \int_0^a e^x dx + ai\int_0^{\pi/a} e^{ae^{it}} e^{it}dt - i\int_0^a e^{iy}dy$

حيث $e^{it} = \cos t + i\sin t$ ، ونعتبر الأجزاء التخيلية للتكاملين الأخريين.

(٧) $\sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$ حيث $x = at$ ، $y = bt$ و $0 \le t \le T$.

(٩)
$$0 = \int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-a}^{a}\frac{dx}{1+x^2} + i\int_0^b \frac{dy}{(1+a^2-y^2)+2iay}$$
$$-i\int_0^b \frac{dy}{(1+a^2-y^2-2iay)} - \int_{-a}^{a}\frac{dx}{(1+x^2-b^2)+2ibx}$$

اضرب البسط والمقام للتكامل الأخير بالمرافق المركب وخذ النهاية عندما $a \to \infty$.

(١١) استخدم المستطيل في المثال (٢,١,٣) والدالة $f(z)=e^{ikz}/(1+z^2)$.

(١٣) كامل الدالة $f(z)=e^{-z^2}$ على المحيط للمستطيل $0\le x\le a$ ، $0\le y\le b$ ، واجعل $a\to\infty$.

(١٥) بين أن $\left|Ri\int_0^{\pi/8}e^{-R^2e^{2it}}e^{it}dt\right|\le R\int_0^{\pi/8}e^{-R^2\cos 2t}dt\to 0$ عندما $R\to\infty$.

تمارين (٢,٣)

(١) 0 .

(٣) $2\pi i/(b-a)$.

(٥) $2\pi i\cos 1$.

(٧) $2\pi i\sin 1$.

(٩) $-2\pi i\sin 1$.

(١١) $-\pi i\sin 1$.

(١٣) افصل التمثيل الوسيط (parametrization) لـ $\gamma_1+\gamma_2$ إلى جزأين.

(١٥) استخدم المتباينة المثلثية والخاصية (iv).

(١٧) استخدم $|1+e^{it}|=\sqrt{2(1+\cos t)}$.

(١٩) استخدم تقدير كـوشي للدالة f مع أخذ $M=(1-r)^{-1}$ وصغر النتيجة لكل قيم $0\le r\le 1$.

(٢١) لتكن $z=e^{i\theta}$ ، $0\le\theta\le 2\pi$ وساوي الحدود التخيلية.

(٢٣) تكون الدالة تحليلية في كل قرص D والتحليلية خاصية محلية.

تمارين (٢,٤)

(١) بين أن $f^{(n)}$ ثابتة.

(٣) طبق مبدأ القيمة العظمى المطلقة على $F(z)$ كما عرف بوساطة التمرين (٢).
إذن $|F| \leq 1$ على $|z| = 1$. والتساوي يجعل F ثابتة.

(٥) لتكن $f(z) = z$ ، G قرص الوحدة المفتوح.

(٧) $|f| \neq 0$ على محيط G وإذا كانت f ليس لها جذور في G، فإن مبدأ القيم العظمى والصغرى يؤدي إلى أن f ثابتة على G.

(٩) من نظرية كوشي $\int_{|z|=R} \frac{a_0 dz}{zp(z)} = 2\pi i$

وعندما $R \to \infty$ نحصل على $\lim_{R\to\infty} \frac{P(z)}{a_n z^n} = 1$ لقيم R الكبيرة، $|P(z)| \geq |a_n z^n|/2$.

حينئذ تكون $2\pi = \left| \int_{|z|=R} \frac{a_0}{zP(z)} dz \right| \leq \frac{4\pi |a_0|}{|a_n| R^n}$ مؤدية إلى تعارض عندما $R\to\infty$.

تمارين (٢,٥)

(١) استخدم نظرية كوشي للاشتقاق.

(٣) $\left| \int_{\Gamma_R} e^{zt} f(z) dz \right| \leq 2 \sup_{\Gamma_R} |f(z)| \int_0^{2\pi} e^{tR\cos\theta} R d\theta$ ، إذا كان $\sigma>0$.
ضع $g(\theta) = \cos\theta - (1 - 2\theta/\pi)$. إذن $g(0) = g(\pi/2) = 0$ و $g'' < 0$.
استخدم $\cos\theta > 1 - 2\theta/\pi$ لحصر التكامل ولنبين أن الحد يذهب إلى الصفر عندما $R \to \infty$.

(٥) افرض أن المسار كثير الأضلاع $\gamma - \gamma'$ polygonal path في البرهان لنظرية المشتقة العكسية يتجنب النقط $z_1,\ldots,z_n$. إذا وقعت نقط محدود عديدة من النقط غير العادية داخل مستطيل جزئي مكون بوساطة المنحنيات $\gamma - \gamma'$ ، فطبق تمرين (٤). ومنه طبق النظرية الأساسية.

الفصل الثالث

تمارين (٣,١)

(١) $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$ وكل مجموع من الحدود في الأقواس تتجاوز $\frac{1}{2}$.

(٣) افرض أن $f(z)=\sin z$ ، فإن $f^{(4n)}(0)=0$ ، $f^{(4n+1)}(0)=1$ ، $f^{(4n+2)}(0)=0$ ، $f^{(4n+3)}(0)=1$.

(٥) إذا كانت $f(z)=sinh\, z$ ، فإن $f^{(4n)}(0)=0$ ، $f^{(4n+3)}(0)=1$ ، $f^{(4n+2)}(0)=0$ ، $f^{(4n+3)}(0)=1$.

(٧) استخدم المتسلسلة الهندسية في مثال (٢, ١ , ٣).

(٩) $\frac{1}{1-i-(z-i)}=\frac{1}{1-i}\left[1+\frac{z-i}{1-i}+\frac{z-i^2}{1-i}+\cdots\right], |z-i|<\sqrt{2}$.

(١١) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-\pi/2)^{2n}}{(2n)!}$.

(١٣) $i\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^n}{n}(z-i)^n , |z-i|<1$.

(١٥) $\log|z|+3\pi i-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2e^{3\pi i})^n}{2^n n}, |z-2e^{3\pi i}|<2$.

(١٧) 10.

(١٩) 6.

(٢١) لا.

(٢٣) $f(z)=(2-z)^{-1}$.

(٢٥) $f(z)=0$ و $g(z)=\sin z$ كليهما دوال تحليلية شاملة (entire).

(٢٧) عبر عن $e^{\alpha \, Log(1+z)}$ بصورة متسلسلة ماكلورين.

تمارين (٣,٢)

(١) 0.

(٣) 1.

(٥) $\frac{1}{3}$.

(٧) R.

(٩) R^k.

(١١) R.

(١٣) $\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) z^n \; , R = 1$.

(١٥) كامل متسلسلة ماكلورين للدالة $\sin z / z$ لتحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} , R = \infty$$

(١٧) $f(z) = a_0 \cos z + a_1 \sin z$.

(١٩) $a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} / 2^{2n} (n!)^2$.

(٢١) استخدم متسلسلة تيلور للدالتين $f(z) = 0$ و $g(z)$ حول z_0 لتحصل على :

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)(z-z_0) + f''(z_0)(z-z_0)^2/2 + \cdots}{g'(z_0)(z-z_0) + g''(z_0)(z-z_0)^2/2 + \cdots}$$

بعد ذلك اقسم البسط والمقام على $z - z_0$ وخذ النهاية عندما $z \to z_0$.

(٢٣) $\sqrt{3}(1-z)/2(1-z)^3$.

(٢٥) متسلسلة القوى للدالة e^{zt} هي دالة شاملة لذا طبق نظرية فيرستراس.

(٢٧) التفاضل تحت علامة التكامل لأن المتسلسلة متقاربة بانتظام.

(٢٩) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n t^n g(t) = \frac{g(t)}{1-zt}$ تتقارب بانتظام على $0 \le t \le 1$ لقيم $|z|<1$. طبق "نظرية فيرستراس" وفاضل حدا بحد لتحصل على $f'(z) = \int_0^1 \frac{tg(t)}{(1-zt)^2} dt$.

تمارين (٣,٣)

(١) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n-1} = \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 - \cdots$.

(٣) $\left(\frac{1-z}{2}\right)^n \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} - \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^{-(n+1)}$ -.

(٥) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{-2n-1}$.

(٧) $\sum_{n=-\infty}^{-2} (1-z)^n + \frac{1}{4}\sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n$.

(٩) $\left(\frac{1-z}{3}\right)^n \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty} + \frac{1/3}{z-1}$.

(١١) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{-z}{2}\right)^n - z^n\right]$.

(١٣) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(z+2)^{n+1}} + \frac{1}{z+2}$.

(١٥) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ حيث $c_n = c_{-n}$ ، $c_n = \sum_{k=0}^{\infty} [k!(n+k)!]^{-1}$.

(١٧) $\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}(z^{2n+1} + z^{-2n-1})$ حيث $c_{2n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{k!(2n+1+k)!}$.

(١٩) $\left(\sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{-(2n+1)}}{(2n+1)!}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n(z-1)^n$

حيث $c_n=\sum_{k=q}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ ، $q=0$ لقيم $n\geq -1$ و $q=[|n/2|]$ لقيم $n\leq -2$ ، حيث $[m]$ هو أكبر عدد صحيح أقل من أويساوي m.

(٢١) $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-1)^{-n}$ حيث $c_n=\frac{(-1)^{[n/2]}}{(2[n/2]+1)!}$.

(٢٣) $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{e^{z/2(\zeta-1/\zeta)}}{\zeta^{n+1}}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(z\sin\theta-n\theta)}d\theta$

والجزء التخيلي لهذا التكامل هو صفر.

(٢٥) $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{2}z^{m-2n}=(z+\frac{1}{z})^m$ ،

$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(z+z^{-1})^m}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-in\theta}\cos^m(\theta)d\theta$.

وبالتالي $\binom{m}{n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\theta\cos^m\theta d\theta$.

تمارين (٣,٤)

(١) $z=0,\infty$ نقاط قابلة للرفع $z=\pm i$ أقطاب بسيطة.

(٣) $z=0$ نقطة شاذة رئيسية و $z=\infty$ قطب بسيط.

(٥) $z=0$ نقطة شاذة رئيسية و $z=\infty$ نقطة شاذة قابل للرفع.

(٧) الدالة $(z+1)e^{1/(z-1)}/(z^4+z^3)$ عبارة عن مثال.

(٩) $C(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{2n(2n)!}$.

(١١) $L(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n^2}$.

(١٣) لتكن k هي رتبة القطب عند ∞ ($k=0$ إذا كانت ∞ نقطة شاذة قابلة للرفع)، وطبق نظرية ليوفيل على $z^{-k}f(z)$ نقطة شاذة أساسية.

(١٥) ليست $z=\infty$ بالنقطة الشاذة الأساسية، أو ممكن أن تكون قطب من الرتبة $k\geq 1$، وحينئذ $f(z)=z^k f_k(z)$، حيث f_k تحليلية على m والصفر لم يحذف (يهمل).

تمارين (٣,٥)

(١) اعتبر $R=1/2 \cdot -\log(1-z)$.

(٣) استخدم $-\log(1-z)$.

(٥) $|z-1|<1\,,\; z^{1/2}=1+\frac{1}{2}(z-1)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-3)!(z-1)^n}{2^{2(n-1)}(n-2)!n!}$، لا.

(٧) $\left(\sin\frac{\pi z}{2}\right)^{1/2}=1-\frac{\pi^2}{8}\frac{(z-1)^2}{2!}-\frac{\pi^4}{8^2}\frac{(z-1)^4}{4!}$، لا.

(٩) لتكن $\zeta=e^{2\pi i p/q}$ لأي أعداد موجبة p، q

ولاحظ أن $f(t\zeta)\to\infty$ عندما $t=1^-$

(١١) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)!(z-1)^n}{n!}$ و $f(z)=\frac{2}{z^3}$

(١٣) عرف $F(z)=\begin{cases} f(z)\,, & z\in G^+\cup\gamma \\ \overline{f(\bar{z})}\,, & z\in G^- \end{cases}$

إذن $F(z)$ متصلة على $G=G^+\cup\gamma\cup G^-$

على G^- نحصل على $F(z)=u(\bar{z})-iv(\bar{z})$

حيث $f = u + iv$, . إذن :

$$-iF_y = v_y(\bar{z}) + iu_y(\bar{z}) = u_x(\bar{z}) - iv_x(\bar{z}) = F_x$$

لذا F تحليلية في G^- . لكل z_0 في γ .

اعتبر $\rho > |z - z_0|$ داخل G . قسم الدائرة إلى نصفي دائرة وبين بالاتصال أن

$$\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{F(z)}{z - z_0} dz = 0$$

(١٥) إذا كانت $|z| = 1$ فإن :

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots = 2$$

لذا تتقارب دائما . إلا أن التفاضل حدا بحد يعطي

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n} = \frac{-1}{z} Log(1 - z)$$

والتي تتباعد عند $z = 1$

الفصل الرابع

تمارين (٤,١)

(١) $\operatorname{Res}_i f(z) = -\frac{1}{2}$ و $\operatorname{Res}_{-i} f(z) = -\frac{1}{2}$.

(٣) $\operatorname{Res}_0 f(z) = 1$.

(٥) $\operatorname{Res}_0 f(z) = \frac{1}{2}$.

(٧) $\operatorname{Res}_0 f(z) = -\frac{1}{2}$.

(٩) $\operatorname{Res}_{k\pi i} f(z) = (-1)^k k\pi i$.

(١١) $\operatorname{Res}_{k\pi} f(z) = 1$.

(١٣) $-2\pi i$.

(١٥) 0 (استخدم نظرية الباقي للنقاط الشاذة الداخلية والخارجية).

(١٧) $-2\pi i\,[\operatorname{Res}_{-i} f(z)] = \pi i^n$.

(١٩) 0 ، لأن $\operatorname{Res}_0 f(z) = 0$.

(٢١) πi.

(٢٣) $2\pi i\,[\operatorname{Res}_{\pi/2} \tan z + \operatorname{Res}_{-\pi/2} \tan z] = -4\pi i$.

(٢٥) احذف كل العوامل المشتركة بين P و Q . إذن :

$$\left(\frac{P}{(z-r)^a Q_1}\right)' = \frac{1}{(z-r)^a}\left(\frac{P}{Q_1}\right)' - \frac{1}{(z-r)^{a+1}}\left(\frac{aP}{Q_1}\right)$$

لذا

$$\operatorname{Res}_r \left(\frac{P}{Q_1}\right)' = \lim_{z\to r} \frac{d^a}{dz^a}\left\{ (z-r)\left(\frac{P}{Q_1}\right)' - \frac{aP}{Q_l} \right\}$$

وبواسطة الاستقراء (induction) :

$$= \lim_{z\to r} \frac{d^{a-k}}{dz^{a-k}}\left\{(z-r)\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{k+1} + (k-a)\left(\frac{P}{Q_1}\right)^{(k)}\right\} = 0 + (k-a)$$

وبالتعاقب طبق النظرية الأساسية في جوار أي نقط شاذة.

تمارين (٤,٢)

(١) $i \int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(z^2-1)^2 - 4az^2} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\sin^2\theta}$ و $\frac{1}{4}$ و $\left|\sqrt{a} - \sqrt{a+1}\right| < 1$

(٣) $-4i \int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(a^2-b^3)z^4 + 2(a^2+b^2)z^2 + (a^2-b^2)}$

$$= \frac{-4i}{a^2-b^2} \int_{|z|=1} \frac{zdz}{(z^2+\frac{a+b}{a-b})(z^2+\frac{a-b}{a+b})}$$

و $|a-b| < a+b$.

(٥) $i \int_{|z|=1} \frac{dz}{(az-1)(z-a)}$

(٧) $\frac{-i}{2^n} \cdot \int_{|z|=1} \frac{[(a-ib)z^2+(a+ib)]^n dz}{z^{n+1}}$ واحسب الباقي عند $z=0$.

(٩) استخدم $\cos ib = \cosh b$ و $\sin ib = i \sinh b$

تمارين (٤,٣)

(١) ضع $a=0$ في النظرية الموجودة بهذا الجزء وقدر الباقي للدالة $z/(z^2+2z+2)^2$ عند $-1+i$.

(٣) $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{2\pi i\, \text{Res}_{ai} \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}\right\}$.

(٥) $\text{Re}\left\{2\pi i\ \text{Res}_i (z^2+1)^{-n-1}\right\}$.

(٧) $\text{Im}\left\{2\pi i\, \text{Res}_{ib} \frac{z^3 e^{iaz}}{(z^2+b^2)^2}\right\}$.

(٩) $\frac{1}{2}\text{Im}\left\{2\pi i\left[\text{Res}_{(1+i)b/\sqrt{2}} \frac{z e^{iaz}}{z^4+b^4} + \text{Res}_{(-1+i)b/\sqrt{2}} \frac{z e^{iaz}}{z^4+b^4}\right]\right\}$.

تمارين (٤,٤)

(١) استخدم الباقي عند $x = \pm\frac{1}{2}$.

(٣) الباقي عند $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$، ونكتب البسط على النحو : $\frac{1}{2}\sin 2\pi x$.

(٥) الباقي عند $x = 0$ و $x = b\, i$ للدالة

$$f(z) = e^{iz} / z\,(z^2 + b^2)$$

(٧) استخدم $f(z) = (\, e^{iaz} - e^{ibz}\,) / z^2$ على الكونتور (المنحنى) في الشكل (٤,٥).

(٩) استخدم المتطابقة :

$$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \sin A \sin B$$

وكامل الدالة

$$f(z) = (\, e^{i(A-B)} - e^{i(A+B)}\,) / 2(z - a)(z - b)$$

حيث :

$$A = m(z - a) \quad , \quad B = n(z - b)$$

حول نصف الدائرة لها نصف قطر R مع أنصاف الدوائر مضافة عند a ، b ذات أنصاف أقطار r .

تمارين (٤,٥)

(١) استخدم طريقة مثال (٤,٥,١). ولقيم $a = 0$ حل مباشرة وفسر الإجابة على أنها نهاية عندما $a \to 0$.

(٣) انظر الإجابة للتمرين (١) .

(٥) حل مباشرة لقيم $a = 0 , 1 , 2$. فسر الإجابة لقيم $a = 1$ عل أنها نهاية .

(٧) استخدم طريقة مثال (٤,٥,٢) .

(٩) استخدم $f(z) = z^a \log z / (z^2 + b^2)$ على الشكل (٤,٦) .

(١١) استخدم $f(z) = e^{iaz} / \sinh z$ فوق الكونتور المستطيل

$$\{z : |x| \le R \;,\; 0 \le y \le 2\pi i\}$$

مع حذف أنصاف دوائر عند 0 و $2\pi i$. القطب عند πi له باقي $-i \sinh \pi a$.

(١٣) استخدم $f(z) = e^{az} / \cosh \pi z$ فوق الكونتور المستطيل .

$$\{z \ : \ |x| \leq a \quad , \quad 0 \leq y \leq 1\}$$

قطب عند $i/2$ مع باقي $\cos(a/2)/\pi i$.

(١٥) عوض بوضع $u = x^a$ وطبق التمرين (١٤) .

(١٧) عوض بوضع $x = b \tan\theta$ و $b = 1$. هذا التعويض يغير التكامل الثاني إلى ما هو موجود في مثال (٤,٥,٢) .

تمارين (٤,٦)

(١) 0

(٣) 0

(٥) $(i)\ 5$ ، $(ii)\ 8$ ، $(iii)\ 5$ و $(iv)\ 6$.

(٧) 3 . دع $f(z) = (z^2 - 1) . (z^4 - 5z^2 + 5)$ ولاحظ أن $|z| < |z^2 - 1|$ على نصف الدائرة $|z| = R > 2$ ، $x > 0$ ، وعلى القطعة المستقيمة $z = iy$ و $|y| \leq R$

(٩) 0 . اضرب المعادلة بوساطة $z^2 + 2$.

(١١) طبق مبدأ السعة على $g(z) = f(z) - a$.

(١٣) اختر أي نقطة داخلية z_0 من G . وبتمرين (١٢)، $f(z_0)$ نقطة داخلية للمجموعة $f(G)$ لأن كل نقطة في قرص صغير جدا متمركز عند $f(z_0)$ له صورة عكسية في G ولا توجد نقطة داخلية لـ G يمكن أن يكون لها قيمة عظمى مطلقة لأنها داخل $f(G)$.

الفصل الخامس

تمارين (٥,١)

(١) C .

(٣) $z \neq 0$.

(٥) ضاعف الزاوية أربع مرات إلى 2π بالتقدير القطري .

(٧) ضاعف الزاوية .

(٩) ضع $z = r(1 + e^{i\theta})$ وربع

(١١) $\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ وطبق معادلات كوشي – ريمان .

(١٣) انظر إلى نظرية ليوفيل

(١٥) يوجد قيمة θ و $\varepsilon > 0$ بحيث إن $\mathrm{Re}\,(e^{i\theta} f'(z)) > 0$ لكل z في $|z - z_0| < \varepsilon$.

تمارين (٥,٢)

(١) $v < 0$

(٣) $|w - (1+i)/2| > \sqrt{2}/2$ و $|w - (1-i)/2| > \sqrt{2}/2$.

(٥) بالتعويض في مثال (٥,٢,٥) يعطي

$$16\,(w^4 + 8w^3 + 3w^2 - 2w + 1) = 0$$

(٧) دع $w = exp\,[\,2\pi i z/(z-2)\,]$

(٩) دع $w = \sin^{-1}(i z^2)$

تمارين (٥,٣)

(١) $w = \dfrac{i-1}{z} \quad \dfrac{z+1}{z-1-i}$

(٣) $\dfrac{2-w}{w-4} = \dfrac{1+i}{z} \quad \dfrac{1+z}{1+i-z}$

(٥) لا : ليست تحليلية .

(٧) $(3+4i)/25$.

(٩) $(2+5i)/3$.

(١١) $w=(-2+4i)(z+1)/(5iz+2+i)$.

(١٣) $2-\sqrt{3}$.

(١٥) الدالة $w = i\,\dfrac{z-(a-R)}{z-(a+R)}$

تصور الدائرة فوق المحور الحقيقي . إذن :

$$\overline{\left[i\frac{z-(a-R)}{z-(a+R)}\right]} = i\frac{\left[\dfrac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}}+a\right]-(a-R)}{\left[\dfrac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}}+a\right]-(a-R)}$$

تؤدي إلى أن : $z^* = (R^2/(\bar{z}-\bar{a}))+a$.

تمارين (٤,٥)

(١) $w = \dfrac{2i}{\pi}\log\dfrac{1+w}{1-w}$.

(٣) $w = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$.

(٥) انظر مسألة (٩) بتمارين (٥,١) . داخل رسم القلب .

(٧) تصور فوق نفسها مع عكس الدوران .

(٩) أولا غير إلى اليسار وحدة واحدة ، واعتبر الجذر التربيعي ذات قطع للفرع (branch cut) على المحور الحقيقي الموجب . أخيرا

$$w = \frac{\mathrm{i}\sqrt{z-1}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2-\mathrm{i}\sqrt{z-1}}$$

(١١) افرض أن μ و ν نقط للفرع (branch points) لسطح ريمان للتحويل . وبجعل $w = f(z)$ فإن $\zeta(z) = [2f(z) - \mu - \nu]$ تصور مستوى $-z$ فوق سطح ريمان ذات الطيتين ونقط للفرع عند ± 1 بكتابة $\zeta = (z)$ كمتسلسلة لورنت، ونرى أن $Z(z) = \zeta(z) + \sqrt{\zeta^2(z) - 1}$ تحليلية عند ± 1 وهي إما تحليلية أو لها أقطاب بسيطة عند أقطاب $\zeta(z)$.

أكثر من ذلك $Z(z)$ يجب أن يكون لها على الأقل قطب واحد بسيط أو ما عدا تكون ثابتة ، لذا $Z(z)$ دالة كسرية . أخيرا وضح أن $Z(z)$ من الدرجة الأولى، ومن ذلك ينتج الحل. البديل الثاني يحدث عندما $\nu = \infty$.

تمارين (٥,٥)

(١) ثابت = $\text{Im}(z^{4/3}) = A\, \text{Im}(A z^{4/3})$. ونقطة الأصل نقطة ركود .

(٣) ثابت = $\text{Im}(A z^4)$ أو ثابت = $x^3y - xy^3$ ونقطة الأصل نقطة ركود.

(٥) $V = \overline{w'} = 1 - 3\,\bar{z}^2$

لذا $|V| = 1,2,4$ عند 0 ، i، 1 على الترتيب. $w' = 0$ عندما $z = \pm(3)^{-1/2}$.

(٧) $V = 3 + 2i\bar{z}$، وعليه $|V|=1\ ,\ \sqrt{13},1$ عند i , 1 , 0 على الترتيب. $w' = 0$ عندما $z = -3i/2$.

(٩) ثابت = $y + 3x^2y - y^3$

ثابت = $y + 2(x^2 - y^2)$

ثابت = $3y - (x^2 - y^2)$

ثابت = $\cos x \sinh y$

(١١) $e^w = (z \pm \sqrt{z^2 - a^2}\ / a)$

وبالتالي : ثابت = $\arg[(z \pm \sqrt{z^2 - a^2})/a]$

(١٣) خطوط السيل هي القطاعات الزائدة المتحدة البؤرات

$$\frac{x^2}{a^2 \cos v} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2 v} = 1$$

ثابت $= v$. لقيم $v = 0 , \pi$ نحصل على التدفق على الحواف للفتحة ، ولكن هذا التدفق ليس مدركاً فيزيائياً لأن :

$$\frac{1}{V} = \frac{dz}{dw} = a \sinh w = a \sqrt{\cosh^2 w - 1} = \sqrt{z^2 - a^2} \;,$$

بحيث إن $|V|$ غير نهائية عند $z = \pm a$.

(١٥)
$$\overline{V} = w' = A\,(1 - a^2/z^2)$$

لقيم $z = a\,e^{i\theta}$ نحصل على :

$$|\overline{V}\;(a\,e^{i\theta})| = |A\,(1 - e^{-2i\theta})| = 2\,A\,|\sin\theta|$$

ولكن
$$\frac{p(\infty)}{\rho} + \frac{1}{2}A^2 = \frac{p(z)}{\rho} + 2A^2 \sin^2\theta$$

يعطي
$$\frac{p(\infty)}{\rho} = \frac{p(\infty)}{\rho} + \frac{1}{2}\;A^2\,[\,1 - 4\sin^2\theta\,]$$

إذا كانت : $A^2 > \dfrac{2\,p\,(\infty)}{3\,\rho}$, $\theta = \pm\,\pi/2$

فإن التكهف (cavition) يحدث .

تمارين (٥,٦)

(١) ثابت $= \operatorname{Im} \sqrt{w^2 + 1}$ هي خطوط السيل في المستوى $w-$.

(٣) واضح تصوير نصف المستوى العلوي إلى مربع لأن

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\,(x^2 - 1)}} = i \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\,(1 - x^2)}} = -\int_0^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x\,(1 - x^2)}} = \int_0^{-1} \frac{d(-x)}{\sqrt{(-x)\,(x^2 - 1)}}$$

ضع $x^2 = t$ ، استخدم التكامل في مثال (٥,٦,٤)

$$\Gamma\,(x)\,\Gamma(1 - x) = \pi / \sin \pi x$$

لنحصل على

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t^{3/4}\sqrt{1-t}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\,\Gamma(3/4)}$$

(٥) $w = (1-2z)\sqrt{z-z^2} - (\sin^{-1}(2z \quad 1))/2 - \pi/4$

(٧) استخدم المتطابقات :

$\Gamma(1/2)^2 = \pi$ و $\Gamma(1/4)\,\Gamma(3/4) = \pi\sqrt{2}$ ، إذن $w = \int_0^z \frac{z(z-1)}{\sqrt{z}}\,dz$

$$\left|\int_0^1 \frac{(x-1)^{3/4}}{\sqrt{x}}\,dx\right| = \left|(-1)^{-3/4}\frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(7/4)}{\Gamma(9/4)}\right| = \frac{12\pi\sqrt{2\pi}}{5\Gamma(1/4)^2}$$

(٩) ضع $s^2 = (z-a)/z$ واعتبر الدالة : $w = \int_0^1 \frac{\sqrt{z-a}}{\sqrt{z(z-1)}}\,dz$

تمارين (٥,٧)

(١) $\zeta = (z-\sqrt{3})/(z+\sqrt{3})$ يصور المنطقة إلى الحلقة $1 > |\zeta| > (\sqrt{3}-1)/(\sqrt{3}+1)$.

وخطوط تساوي الجهد في مستوى $-\zeta$ هي الدوائر ثابت $=|\zeta|$، لذا خطوط تساوي الجهد بالمستوى $-z$ تحقق

ثابت $= |z-\sqrt{3}|/|z+\sqrt{3}|$

(٣) $u = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\,(\sin^{-1} e^z)$

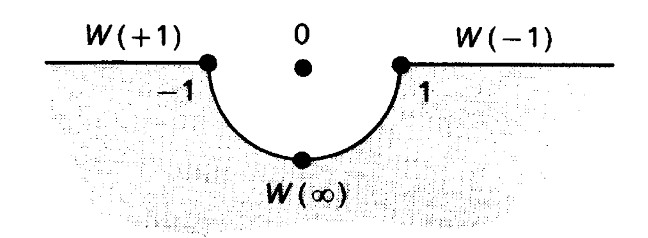
(٥) $u = \frac{1}{\pi}\, Arg\, \frac{1+\sin(\pi z/2)}{1-\sin(\pi z/2)}$

(٧) دع $w = A(\cosh\zeta - i\alpha)$ ، $z = \cosh\zeta$

والدالة الأولى تنتج عائلة من القطاعات الناقصة متحدة البؤرات، وعائلة من القطاعات الزائدة متحدة البؤرات .

تمارين (٥,٨)

(١) v حقيقية على حواف الإناء، والسرعة تتساوى عند ± 1 ولكن في الاتجاهات المضادة، وثابتة على خطوط السيل الحرة. وحيث إن $V(0)$ تخيلية بحتة فإننا نحصل على الراسم الخطي:



مع $W = A/\overline{V} = A/\ w'(z)$. إذن اعتبر التتابع للدوال:

$$z_1 = 2\ Log\ W + i\pi$$

$$z_2 = \sin (iz_1/2)$$

$$\zeta = \frac{2}{\pi}\ \text{Log}\ z_2 - i$$

الفصل السادس

تمارين (٦,١)

(١) $\phi = \text{Re}\,(e^z)$. تأكد من أن معادلة لابلاس تتحقق.

(٣) $\phi = \text{Re}\,(z^3)$. تأكد من أن معادلة لابلاس تتحقق.

(٥) $f(z) = sin\ z$ تحليلية شاملة.

(٧) لا.

(٩) $v = \tan^{-1} (y/x) \ + \text{constant}$

(١١) $v = -y/[(x-1)^2 + y^2] + \text{constant}$

(١٣) اعتبر الجزء الحقيقي من $\log f(z)$

(١٥) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|1 + r e^{i\theta}|\, d\theta = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log|1 + r^2 + 2r\cos\theta|\, d\theta$$
$$\to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

و $$\int_0^{2\pi} \log\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \log\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = 2\int_0^{\pi} \log\sin\phi\, d\phi$$

تمارين (٦,٢)

(١) كامل الطرفين لنظرية القيم المتوسطة بالبند (٦,١) لتحصل على :

$$u(\zeta) = \frac{2u(\zeta)}{R^2}\int_0^R r\, dr = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \int_0^{2\pi} u(\zeta + r e^{i\theta})\, r\, dr\, d\theta$$

(٣) $\overline{\text{grad}\ \bar{u}} = f'$ حيث $f = u + iv$ حيث v أي مرافق توافقي للدالة u .

(٥) استخدم $g(z) = (z^2 - z_0^2)/(z^2 - \bar{z}_0^2)$

إذن : $$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} u(\zeta) \cdot \frac{2\zeta(z^2 - \bar{z}^2)}{(\zeta^2 - \bar{z}^2)(\zeta^2 - z^2)}\, d\zeta$$
$$= \frac{4xy}{\pi} \cdot \left[\int_0^{\infty} t\left(\frac{u(it)}{|t^2 + z^2|^2} + \frac{u(t)}{|t^2 - z^2|^2}\right) dt\right]$$

(٧) إذا كانت $u(z)$ و $U(z)$ كلاهما حلين لمشكلة (لمسألة) دي رشيليه ، أي أنهما دالتين متصلتين على $\overline{G}$ ، فإن $U(z) - u(z)$ توافقية على منطقة بسيطة الترابط G ومتصلة على $\overline{G}$. مبدأ القيم العظمى يؤدي إلى أن $U - u$ يصل إلى القيمة العظمى والصغرى على ∂G . ولكن $U - u = 0$ على ∂G ، لذا u وحيدة .

(٩) $u(e^{i\theta}) = 0 = u_r(e^{i\theta})$ و $u_r(re^{i\theta}) = a \geq u(re^{i\theta})$ بوساطة مبدأ القيم العظمى . إذن بوساطة التمرين (٨) ولقيم $r < k < 1$ ،

$$u(ke^{i\theta}) \leq u_r(k\,e^{i\theta}) = a\ \frac{\log k}{\log r} \to 0$$

عندما $r \to 0^+$. وبما أن k يمكن أن نجعلها اختيارية صغيرة ، فإن u ليست متصلة عند 0

(١١) استخدم صيغة تكامل كوشي للدالة $f(z)$ المتساوية :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\bar{z}}{\bar{z}-\bar{\zeta}} d\phi = 0$$

(١٣) أضف واطرح

$$u(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\ \frac{d\zeta}{\zeta} = 0$$

وطبق الطريقة الموجودة بنظرية "بواسون" .

(١٥) $$u(z) = \frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{d(t-x)}{(t-x)^2+y^2} = \frac{1}{-\pi}\arg\left(\overline{\frac{z-1}{z+1}}\right) = \frac{1}{\pi}\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

لقيم $0 \leq \arg z \leq \pi$.

تمارين (٦,٣)

(١) $$u(z) = \frac{1}{2}\left[\ (u_0+u_1) + (u_0-u_1)\,.\,\frac{2}{\pi}Arg\left(\frac{i-z}{i+z}\right)\right]$$

(٣) $w(z) = \dfrac{Q}{2\pi}\ log\ \dfrac{z-i}{z}$. عائلة من الدوائر خلال i و 0.

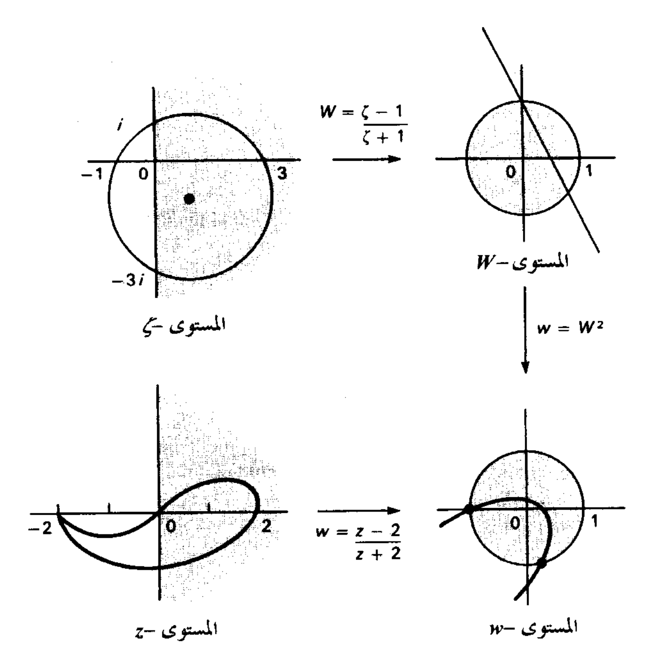
(٥) المصادر عند $\pm i$ ، والتصاريف عند 0، ∞ ، وكل منها له القوة Q، ونقط الركود عند ± 1 و ∞. وخطوط تساوي الجهد تعطى بوساطة $|z+1/z|=\text{constant}$ ، وخطوط السيل تعطى بوساطة $\arg(z+1/z) = \text{constant}$.

(٧) مصارف بقوة 2π عند ± 1 و $\pm i$ ومنابع قوة 4π عند 0 و ∞. النقط $\pm(1 \pm i)$ و ∞ نقط ركود. وخطوط تساوي الجهد تحقق، ثابت $|z^2 - \frac{1}{z^2}| = \text{constant}$، بينما خطوط السيل تعطى بوساطة : $\arg(z^2 - 1/z^2) = \text{constant}$

(٩) لتكن

$$w = \frac{-Q}{2\pi n} \log \frac{z^n + r}{z^n} = \frac{-P}{2\pi n} \log \left(1 + \frac{r}{z^n}\right)^{1/r} \rightarrow \frac{-P}{2\pi n} \frac{1}{z^n}$$

(١١)



تمارين (٦,٤)

(١) $c_0 = \pi, \ \ c_n = i/n$

وعليه

$$u(z) = \pi + 2\text{Re}\left(i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right) = \pi + 2\text{Re}[-i\,\text{Log}(1-z)] = \pi + 2\,\text{Arg}(1-z)$$

(٣) $$u(re^{i\theta}) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n+1} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1}$$

(٥) لتكن f تحليلية شاملة ومحددة بالمقدار M . وبمتطابقة " بارسافل "

$$2\pi \sum r^{2n} |c_n|^2 = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\phi})|^2 \, d\phi \le 2\pi M^2$$

وعليه $0 \to |c_n| \le M/r^n$ ، عندما $r \to \infty$.

إذن $c_n = 0$ لقيم $n > 0$ ، $f(z) = \sum_n c_n z^n = c_0 = c_0$ ، ثابت .

(٧) لتكن $f(re^{i\phi}) = \phi^2 - 2\pi\phi$ في متطابقة " بارسافل "

حاصلين على : $c_n = 2/n^2$, $c_0 = -2\pi^2/3$ ، لقيم $n > 0$

(٩) $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 1$ ، والقيم الأخرى $c_n = 0$ ،

ولذا فإن متطابقة " بارسافل " تعطي :

$$2\pi \sum_0^{n-1} r^{2k} = \int_0^{2\pi} \left| \frac{re^{ni\phi} - 1}{re^{i\phi} - 1} \right|^2 d\phi$$

ضع $r = 1$ لتحصل على :

$$2\pi = \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{ni\phi/2} - e^{-ni\phi/2}}{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}} \cdot \frac{e^{ni\phi/2}}{e^{i\phi/2}} \right|^2 d\phi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin n\phi/2}{\sin \phi/2} \right)^2 d\phi$$

(١١) لتكن $N = N_1 \; N_2 \dots N_j$

$k = k_1 N_2 \; .. \; N_j + k_2 \; N_3 \; .. \; N_j + \dots + k_j$ ،

$n = n_j N_{j-1} \; .. \; N_1 + \dots + n_1$,

إذن نعرف

$$c^{\ell}(n_1, n_2, \dots, n_\ell, \; k_{\ell+1}, \dots, k_j) = \prod_{m=1}^{\ell} (e^{k_{\ell+1}} N_{\ell+1} \dots N_j n_m N_{m-1} \dots N_1 .$$

$$\sum_{k_{\ell=0}}^{N_{\ell-1}} c^{(\ell-1)}(n_1, \ldots, n\ell-1 \ , k\ell \ , \ldots, k_j)\ e^{n_\ell k_\ell}$$

تمارين (٦,٥)

(١) $(\pi/2) \quad e^{-b|t|}$

(٣) $(\pi/2) \quad (1 \quad b\,|t|)\, e^{-b|t|} / 2b$

(٥) $e^{-t^2/4k} / \sqrt{2k}$

(٧) $-i\,(\pi/2) \quad \tanh\ (\pi t/2)$

(٩) $u(t) = (1 - i \text{ sign } t) / 2\,|t|^{1/2}$

ضع $t = s^2$ وقارن مع تمرين (١٥) للبند (٢،٢).

(١١)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\phi}\ U(\phi)\ \overline{V(\phi)}\, d\phi =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\phi}\ \overline{V(\phi)}\ .\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{it\phi} dt\right\} d\phi =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{V(\phi)} \quad e^{i(t-x)\phi} d\phi \right\} dt =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\ \overline{v(t-x)}\, dt$$

إذن ضع $x = 0$. وللجزء الثاني دع $V = U$.

تمارين (٦,٦)

(١)

$$\int_0^{\infty} \cosh z\phi\, e^{-s\phi} d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [e^{-(s-z)\phi} + e^{-(s+z)\phi}]\, d\phi =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-z} + \frac{1}{s+z}\right] \quad ; \quad \text{Re}\, s > \text{Re}\, z\ , -\text{Re}\, z$$

(٣) $\frac{-d}{ds}\mathcal{L}\{\sin z\phi\} = -\frac{d}{ds}[z(s^2+z^2)^{-1}]$ بالمعادلة (3) .

(٥) $-\frac{d}{ds}\ \mathcal{L}\{\sinh z\phi\} = -\frac{d}{ds}\ [z(s^2\quad z^2)^{-1}]$

(٧) بوساطة النظرية الأولى للإزاحة .shifting Th :

$$\mathcal{L}\{e^{-w\phi}\sin z\phi\}(s) = \mathcal{L}\{\sin z\phi\}(s+w)$$

وطبق مثال (٦.٦.٥).

(٩) $\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{\sin z\phi\} = \mathcal{L}\{\phi^2\sin z\phi\}$ بوساطة معادلة (3) .

(١١) $\cos 2z\phi = 2\cos^2 z\phi - 1$

ولذا أوجد : $\mathcal{L}\{(1+\cos 2z\phi)/2\}$

(١٣) بوساطة النظرية الثانية للإزاحة :

$$\mathcal{L}\{H(\phi-a)\cos z\phi\} = e^{-as}\mathcal{L}\{\cos z(\phi+a)\}$$
$$\cos z(\phi+a) = \cos z\phi\ \cos za - \sin z\phi \sin za$$

(١٥) $U(\phi) = \sin\phi + (\phi\sin\phi - \phi^2\cos\phi)/4$

(١٧) $\mathcal{L}\{U\} = U(0^+)(s^2+1)^{-1/2}$

وهي التحويل لـ : $U = U(0^+)J_0(\phi)$

حيث J_0 دالة "بيسل" ذات الرتبة صفر .

(١٩) $U(\phi) = |\sin\phi^{-1}|$

(٢١) افترض أن $|U|$ محدودة بوساطة M على $(0,\Phi)$ و $Ne^{a\phi}$ لقيم $\phi > \Phi$.

إذن :

$$|\mathcal{L}\{U\}| \le \int_0^{\Phi} M\,|e^{-s\phi}|\,d\phi + \int_{\Phi}^{\infty} N\,|e^{-(s-a)\phi}|\,d\phi =$$

$$M\left[\frac{1-e^{-(\mathrm{Re}\,s)\Phi}}{\mathrm{Re}\,s}\right] + N\frac{e^{-(\mathrm{Re}\,s-a)\Phi}}{\mathrm{Re}\,s-a} \to 0$$

عندما $s \to \infty$.

(٢٣)
$$\lim_{s\to 0^+} s\mathcal{L}\{U\} = \lim_{s\to 0^+}\left\{-U(\phi)e^{-s\phi}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty U'(\phi)e^{-s\phi}\right\}d\phi =$$
$$U(\phi) + \int_0^\infty U'(\phi)\left\{\lim_{s\to 0^+} e^{-s\phi}\right\}d\phi = \lim_{\phi\to\infty} U(\phi)$$

(٢٥) بما أن التكاملات مؤثرات خطية ، فإننا نحصل على النتيجة .

(٢٧)
$$(U * V) * W =$$
$$\int_0^x \left(\int_0^\Phi U(t)\, V(\phi - t)\, dt\right) W(x - \phi)\, d\phi =$$
$$\int_0^x \left(\int_t^x V(\phi - t)\, W(x - \phi)\, d\phi\right) U(t)\, dt =$$
$$\int_0^x U(t) \left(\int_0^x V(s)\, W(x - t - s)\, ds\right) dt =$$
$$U * (V * W)$$

وذلك بوضع $s = \phi - t$.

تمارين (٦,٧)

(١) $\phi^2 e^{-a\phi}/2$

(٣) $\phi \sin a\phi / (2a)$

(٥) $(1 - \cos a\,\phi) / a^2$

(٧) $[e^{-a\phi} - e^{a\phi/2} \left(\cos\frac{\sqrt{3}\ a\phi}{2} - \sqrt{3}\ \sin\frac{\sqrt{3}\ a\phi}{2}\right)] / 3\,a^2$

(٩) $\sin a\,(\phi - b)\, H(\phi - b) / a$

(١١) $\phi^{-2/3} / \Gamma(1/3)$

(١٣) $(e^{b\phi} - e^{a\phi}) / \phi$

(١٥) $(1 - \cos 2\,a\phi) / 2\,\phi$.

(١٧) $e^{-a^2/4\phi} \,/\, \sqrt{\pi\phi}$

(١٩) $U(\phi) = \phi^2 + \phi^4 / 12$

(٢١) $\{[a + c(a^2+1)] \cos\phi + \sin\phi - a\, e^{-a\phi}\} / (a^2+1)$

(٢٣) $\frac{1}{2}(e^{\phi} + e^{-\phi}) = \cosh\phi$

(٢٥) عامل x كمتغير وسيط يعطي

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{s^2}{a^2}\, u = -\frac{s}{a^2}\, f(x)$$

مستخدما طريقة تغيير الوسطاء للمعادلات التفاضلية نحصل على

$$u(x, s) = c_1\, e^{sx/a} + c_2\, e^{-sx/a} - \frac{1}{a} \int_0^x f(y) \sinh\frac{s(x-y)}{a}\, dy$$

مع الشروط المحيطية $u(0, s) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} u(x,s) = 0$

إذن $c_1 = c_2 = 0$ لكي تكون

$$U(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\{-\frac{1}{a} \int_0^x f(y) \sinh\frac{s(x-y)}{a}\, dy\}$$

(٢٧)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu}{\delta}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{s}{\delta}\, u = 0$$

لها الحل

$$u = c_1\, e^{(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 4s\delta}\, x)/2\delta} + c_2\, e^{(-\mu - \sqrt{\mu^2 + 4s\delta}\, x)/2\delta}$$

مع الشروط الابتدائية (المحيطية)

$$u(0, s) = \frac{c}{s} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\infty} u(x,s) = 0$$

وعليه $c_1 = 0$ و $c_2 = -c/s$ ،

$$u = \frac{c e^{-\mu x/2s}}{s}\, e^{(-x/\sqrt{\delta})\sqrt{s + \mu^2/4\delta}}$$

وبوساطة نظرية التلفيف والنظرية الأولى للإزاحة يكون

$$u = c\, e^{-\mu x/2\delta} \quad \mathcal{L}\{1\} \quad \mathcal{L}\left\{ \frac{x}{2\sqrt{\pi t^3 \delta}} \cdot e^{-(\mu^2 t + x^2/t)/4\delta} \right\}$$

وهكذا تكون

$$u(x,,t) = \frac{c^x\, e^{-\mu x/2\delta}}{2\sqrt{\pi\delta}} \int_0^t t^{-3/2} \; e^{-(\mu^2 t + x^2/t)/4\delta} \; dt$$

تمارين م (٣) Appendix (A.3)

(١) $2\sqrt{2}$.

(٣) $\int_0^1 y\sqrt{1+\frac{9}{4}y}dy = \frac{4}{81}\left[\frac{(13)^{5/2}-4}{20} - \frac{(13)^{3/2}-1}{3}\right]$

(٥) $\frac{-4}{3}$.

(٧) 148.75.

(٩) 0 .

(١١) بنظرية " جرين "

$$\frac{1}{2}\int_\gamma xdy - ydx = \frac{1}{2}\iint_G (1 - -(-1))dxdy = A$$

(١٣) بنظرية " جرين "

$$\int_\gamma pdy + qdx = \iint_G (p_x - q_y)dxdy = 0$$

(١٥) $\frac{1}{2}\int_\gamma xydy = \iint_G \; ydx\, dy = -\frac{1}{2}\int_\gamma y^2 dx = A\overline{y}$

$$\int_\gamma xydy = -\iint_G \; xdx\, dy = -\frac{1}{2}\int_\gamma x^2 dy = -A\overline{x}$$

المراجع

REFERENCES

[A] Ahlfors, L. V. *Complex Analysis*, 2d ed. McGraw-Hill, New York, 1966.

[B] Buck, R. C. *Advanced Calculus*, McGraw-Hill, New York, 1965.

[CKP] Carrier, G. F., Krook, M., and Pearson, C. E. *Functions of a Complex Variable*. McGraw-Hill, New York, 1966.

[H] Hille, E. *Analytic Function Theory*, Vols. I and II. Ginn (Blaisdell), Boston, Mass., 1959.

[HF] Hoffman, K. *Banach Spaces of Analytic Functions*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[Ho] Hormander, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. Van Nostrand-Reinhold, Princeton, N.J., 1966.

[J] James, R. C. *Advanced Calculus*. Wadsworth, Belmont, Calif., 1966.

[Ke] Kellogg, O. D. *Foundations of Potential Theory*. Dover, New York, 1954.

[Kn] Knopp, K. *Theory of Functions*, Parts I and II. Dover, New York, 1947.

[Ko] Kober, H. *Dictionary of Conformal Representations*, 2d ed. Dover, New York, 1957.

[L] Lang, S. *Complex Analysis*. Addison Wesley, Reading, Mass., 1977.

[M] Moretti, G. *Functions of a Complex Variable*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[MT] Milne-Thomson, L. M. *Theoretical Hydrodynamics*. Macmillan, London, 1938.

[R] Rothe, R., Ollendorff, F., and Pohlhausen, K. *Theory of Functions*. Dover, New York, 1961.

[S] Saks, S. *Theory of the Integral*, 2d rev. ed. Dover, New York, 1964.

[Sp] Springer, G. *Introduction to Riemann Surfaces*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

[T] Titchmarsh, E. C. *The Theory of Functions*, 2d ed. Oxford Univ. Press, London and New York, 1939.

[V] Veech, W. A. *A Second Course in Complex Analysis*. Benjamin, New York, 1967.

[W] Whyburn, G. T. *Topological Analysis*, rev. ed. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1964.

ثبت المصطلحات
INDEX

أولا: عربي – إنجليزي

أ

إثر	Wake
أحادي	Injection
محليا	One to one locally
اختبار النسبة	Ratio test
إزاحة الطور	Phase shift
زاوية	Argument
استمرار تحليلي	Analytic continuation
إسقاط هندسي	Stereographic projection
أس مركب	Complex exponential
أسي	Exponential
اشتقاق	Derivative
من جهة واحدة	Derivative one-sided
إغلاق	Closure

Poles	أقطاب
Smooth	أملس
Piecewise smooth	جزئياً
Translation	انسحاب
Flow	انسياب
Steady flow	ثابت
Heat flow	الحرارة
Jet flow	الطيران
Irrotational flow	غير دوراني
Fluid flow	الموائع
Incompressible fluid flow	غير المضغوط
Inversion	الانعكاس
Monogenic	انفرادي

ب

Focus	بؤرة
Connected simple	بسيط الترابط

ت

Interference effect	تأثير التداخل
Fringe effect	الهدب
Inverse transform	تحويل عكسي
Fast Fourier transform	فورير السريع

Linear fractional transformation	كسري خطي
Laplace transform	لابلاس
Bilinear transformation	مزدوج خطي
Mobious transformation	موبيس
Imaginary	تخيلي
Gradient	تدرج
Circulation	تدوير
Frequency	تردد
Variation	تغير
Cauchy convergence	تقارب كوشي
Absolute convergence	مطلق
Uniform convergence	منتظم
Cauchy estimate	تقدير كوشي
Antiderivative	تكامل
Fresnel's integrals	تكاملات فرسينل
Line integral	تكامل خطي
Dirichlet's integral	دي رشليه
Magnification	تكبير
Cavitation	التكهف
Convolution	تلفيف
Polar representation	تمثيل قطبي

Shcwarz lemma	تمهيدية شفارتز

ج

Root of unity	جذور الوحدة
Imaginary part	جزء تخيلي
Real part	حقيقي
Potential	جهد
Complex potential	مركب
Neighborhood	جوار
Cosine	جيب تمام

ح

Potential field	حقل الجهد
Electrostatic field	كهربية ساكنة

خ

Exterior	خارج
Outside	خارجي
Differentiation property of Laplace transforms	خاصية الاشتقاق لتحويلات لابلاس
Streamline	خط انسياب
Equipotential line	خط تساوي الجهد
Free streamlines	خطوط انسيأب حرة
Force lines	القوى

د

Inside	داخلي
Interior	داخل
Function	دالة
Bijection function	أحادية وغامرة
Stream function	الانسياب
Bessel's function	بسيل
Holomorphic function	تحليلية
Analytic function	تحليلية
Meromorphic function	جزئية
Global analytic function	شاملة
Transfer function	التحويل
Harmonic function	توافقية
Gamma function	جاما
Gauss function	جاوس
Potential function	الجهد
Sine function	الجيب
Surjection function	غامرة
Force function	القوة
Power function	القوى
Entire function	شاملة

Continuous function	دالة متصلة
Multivalued function	متعددة القيم
Complex function	مركبة
Regular function	منتظمة
Impulse function	النبض
Heaviside function	الهيفيسيد
Temperature	درجة الحرارة
Directrix	دليل
Circles of appolonius	دوائر أبو لونيوس
Rotation	دوران

ذ

Positive sense	ذات موجبية

ر

Order	رتبة
Exponential order	أسية
Order of exponential	أسية
Order of a zero	الجذر (الصفر)
Order of a multiplet	الضارب
Order of a pole	القطب
Order of a branch point	نقطة الفرع

ز

Hyperbolic	زائدي
Exterior angle	زاوية خارجية

س

Riemann surface	سطح ريمان
Amplitude	السعة

ش

Charge	شحنة
Intensity	شدة
Source strength	المنبع
Joukowsky figure	شكل جوكوفسكي

ص

Image	صورة
Poisson's integral formula	صيغة بواسون التكاملية
Schwarz formula	شفارتز
Schwarz-christoffel formula	شفارتز كريستوفل
Cauchy integral formula	كوشي التكاملية
Hadamard's formula	هادامارد
Wallis's formula	واليز
Duhamel's formulas	صيغ دوهميل

ط

طريقة تارتاجليا	Tartaglia's method
طول القوس	Arc length
الموجة	Wavelength

ع

العالم زايوكوفيسكي	Zhukovski
فايرستراس	Weierstrass-casorati
كاردانو	Cardano
كارلمان	Carleman
كاندنلسون	Katznelson
لومان —مينكوف	Looman-menchoff
ميتاج ليفلر	Mittag-leffler
مينكوف	Menchoff
عدد حقيقي	Real number
مركب	Complex number
عزم الازدواج	Moment of dipole
عناصر	Elements
متعددة الأقطاب	Multiplet elements
عنصر الوحدة الضاربة	Multiplicative identity
عيون القطة	Lemniscate

غ

غير دوراني	Irrotational

Unbounded	محدود
Incompressible	مضغوط
Infinity	منتهي

ف

Branch	فرع
Principal branch	رئيسي
Onto	فوق

ق

Chain rule	قاعدة السلسلة
Distributive law	قانون التوزيع
Fourier law	فورية
Commutative law	المبادلة
Parallelogram law	متوازي الأضلاع
Associative law	المصاحبة
Dipole	قطب مزدوج
Hyperbola	قطع زائد
Parabola	مكافئ
Ellipse	ناقص
Rules of limits	قواعد النهايات
Arc	قوس
Piecewise smooth arc	أملس جزئيا
Principal value	القيمة الأساسية

القيمة الأساسية لكوشي	Caucy principal value
للسرعة	Speed value
المطلقة	Absolute value

ك

كثيرة حدود لجندر	Legendre polynomial
كرة ريمان	Riemann sphere
كمية	Magnitude

ل

لوغارثم	Logarithm
الفرع	Branch logarithmic

م

مبدأ	Principle
التماثل	Symmetry princple
الزاوية	Argument principle
شفارتز للانعكاس	Schwarz reflection principle
القيم الصغرى	Minimum principle
القيم الكبرى	Maximum principle
متطابقة بارسيفل	Parseval's identity
متباعد	Diverges
متباينة	Inequality
مثلثية	Triangle inequality
هارنك	Harnack's inequality

Vector	متجة
Velocity vector	السرعة
Connected	مترابط
Lagrange's indentity	متطابقة لاجرانج
Taylor series	متسلسلة تايلور
Fourier series	فورير
Laurent series	لورنت
Maclaurin series	ماكلورين
Geometric series	هندسية
Continuous	متصل
Smooth arc	منحنى أملس
Simple arc	بسيط
Multiconnected	متعدد الترابط
Multivalued	القيمة
Complex variable	متغير مركب
Complement	متمم (مكمل)
Complex trigonometry	مثلثية مركبة
Domain	مجال (نطاق)
Convex	محدب
Bounded	محدود
Boundary	محيط
Natural boundary	طبيعي

Harmonic conjugate	مرافق توافقي
Complex conjugate	مركب
Complex plane	مستوى مركب
Extended complex plane	ممتد
Field axioms	مسلمات الحقل
Dirichlet's problem	مشكلة دي رشلية
Boundary values problem	القيم الحدودية
Sink	مصب
Source	مصدر (منبع)
Vortex source	دوامي
Point source	متمركز
Jacobian matrix	مصفوفة التحويل
Cauchy-Riemann equations	معادلات كوشي وريمان
Laplace equation	معادلة لابلاس
Maxwell's equation	ماكسويل
Wave equation	موجية
Fourier coefficients	معاملات فورير
Isotherm	معزول حرارياً
Closed	مغلق
Open	مفتوح
Principal branch	مقطع رأسي
Branch cut	الفرع

Additive inverse	المقلوب بالنسبة للجمع
Multiplicative inverse	للضرب
Modulus	مقياس
Condenser	مكثف
Closed curve	منحنى مغلق
Region	منطقة
Isolated	منعزل
Sinusoidal wave	موجة جيبية
Conductor	موصل

ن

Cross ratio	نسبة متبادلة
Radius of convergence	نصف قطر التقارب
Half plane of convergence	مستوى التقارب
Abel's theorem	نظرية "آبل"
Shifting theorem	الإزاحة
Fundamental theorem	أساسية
Fundamental theorem of calculus	للتفاضل والتكامل
Antiderivative theorem	التكامل
Three-circles theorem	الثلاث دوائر
Zero derivative theorem	المشتقة المنعدمة
Enestrom-kakeya theorem	انستروم كاكاي
Inverse theorem	الانعكاسية

Residue theorem	نظرية الباقي
Pringsheim's theorem	برينجشيم
Poisson theorem	بواسون
Bernoulli's theorem	بيرنولي
Picard's theorem	بيكارد
Taylor theorem	تايلور
Antiderivative theorem	التكامل
Three-circle theorem	الثلاث دوائر
Green's theorem	جرين
Inside-outside theorem	الداخل والخارج
De Moiver's theorem	دي موافر
Binomial theorem	ذات الحدين
Rouche's theorem	روشيه
Riemann theorem	ريمان
Riemann mapping theorem	للتصوير
Weierstrass theorem	فايرستراس
Fourier integral theorem	فورير للتكامل
Mean value theorem	القيمة المتوسطة
Gauss mean value theorem	لجاوس
Area mean value theorem	للمساحة
Caucy theorem	كوشي
Caucy-Goursat theorem	ـــ كورست

Caucy theorem for derivaties	للاشتقاق
L'Hospital's theorem	لوبيتال
Laurent theorm	لورنت
Liouville's theorm	ليوفيل
Jordan arc theorem	منحنى جوردان
Zero derivative theorem	المشتقة المنعدمة
Morera's theorem	موريرة
Monodramy theorem	مونودرومي
Noshiro-Warhawski theorem	ناشيرو وارهاوسكي
Singularities points	نقاط شاذة
Doublet point	نقطة إزدواجية
Origin point	الأصل
Branch point	فرع
Accumulation point	تراكم
Fixed point	ثابتة
Stagnation point	ركود
Essential singularity point	شاذة أساسية
Removable singularity point	قابلة للرفع
Isolated singularity point	منعزلة
Point at infinity	عند اللانهاية
Regular point	منتظمة
Endpoint	النهاية

نهاية	Limit
من جهة واحدة	One-sided limit
نواة بواسون	Poisson kernel

و

واحد إلى واحد (آحادي)	One-to-one
وحدة تخيلية	Imaginary unit
الجمع	Additive identity

ي

يتقارب	Converges

ثانيا: إنجليزي – عربي

A

Abel's theorem	نظرية آبل
Absolute convergence	تقارب مطلق
value	قيمة مطلقة
Accumulation point	نقطة تجمع
Additive identity	وحدة الجمع
inverse	المقلوب بالنسبة للجمع
Amplitude	سعة
Analytic continuation	الاستمرار التحليلي
function	دالة تحليلية
Antiderivative	تكامل
Antiderivative theorem	نظرية التكامل
Arc	قوس
length	طول القوس
, piecewise smooth	منحنى أملس جزئياً (بتقطع)
, simple	منحنى بسيط
, smooth	منحنى أملس
Area mean values theorem	نظرية القيم المتوسطة للمساحة
Argument	إزاحة زاويّة
principle	مبدأ الزاويّة

Associative law	قانون المصاحبة
B	
Bernoulli's theorem	دالة برينولي
Bessel's function	دالة بيسل
Bijection	دالة أحادية وغامرة
Bilinear transformation	تحويل مزدوج الخطية
Binomial theorem	نظرية ذات الحدين
Boundary	محيط
values problem	مشكلة القيم الحدودية
Bounded	محدود
Branch	فرع
cut	مقطع الفرع
logarithmic	لوغاريتم الفرع
point	نقطة الفرع
, principal	فرع رئيسي
C	
Cardano	العالم كاردانو
Carleman	العالم كارلمن
Cauchy convergence	تقارب كوشي
estimate	تقدير كوشي
-Goursat theorem	نظرية كوشي – كورست
integral formula	صيغة كوشي التكاملية

Cauchy principal values	القيم الأساسية لكوشي
-Riemann equations	معادلات كوشي ـ ريمان
theorem	نظرية كوشي
theorem for derivatives	نظرية كوشي للتفاضل
Cavitation	التكهف
Chain rule	قاعدة السلسلة
Charge	شحنة
Circles of Appolonius	دوائر أبولونيوس
Circulation	تدوير
Closed	مغلق
curve	منحنى مغلق
Closure	إغلاق
Commutative law	قانون المبادلة
Complement	متمم (المكمل)
Complex conjugate	مرافق مركب
exponential	أس مركب
function	دالة مركبة
number	عدد مركب
plane	مستوى مركب
potential	جهد مركب
trigonometry	مثلثية مركبة

Complex variable	متغير مركب
Condenser	مكثف
Conductor	موصل
Conformal mapping	دالة حافظة للزوايا
Simple connected	ترابط بسيط
Continuous	متصل
function	دالة متصلة
Converges	يتقارب
Convex	محدب
Convolution	تلفيف
Cosine	جيب التمام
Cross ratio	نسبة متبادل

D

De Moiver's theorem	نظرية دي موافر
Derivative	اشتقاق
, one-sided	اشتقاق من جهة واحدة
Differentiation property of Laplace transforms	خاصية الاشتقاق لتحويلات لابلاس
Dipole	قطب مزدوج
Directrix	دليل
Dirichlet's integral	تكامل دي رشليه
problem	مشكلة دي رشليه

Distributive law	قانون التوزيع
Diverges	متباعد
Domain	مجال
Doublet point	نقطة ازدواجية
Duhamel's formulas	صيغ دوهميل

E

Elements	عناصر
Ellipse	قطع ناقص
Endpoints	نقطتي النهاية
Enestromkakeya theorem	نظرية انستروم كاكيا
Entire function	دالة كلية (أو شاملة)
Equipotential line	خط تساوي الجهد
Essential singularity	نقطة شاذة اساسية
Exponential	أسي
order	رتبة أسية
Extended complex plane	المستوى المركب الممتد
Exterior	خارج
Exterior angle	زاوية خارجية

F

Fast fourier transform	تحويل فورير السريع
Field axioms	مسلمات الحقل
Fixed point	نقطة ثابتة

Flow	انسياب (سريان)
heat	انسياب حراري
irrotational	انسياب غير دوراني
jet	انسياب حول طائرة
steady	انسياب مستقر
Fluid flow	انسياب الموائع
Focus	بؤرة
Force lines	خطوط القوى
Fourier coefficients	معاملات فورير
integral theorem	نظرية فورير التكاملية
law	قانون فورير
series	متسلسلة فورير
Free streamlines	خطوط انسياب حرة
Frequency	تردد
Fresnel's integrals	تكاملات فرسنيل
Fringe effect	تأثير الهدب
Function	دالة
of force	دالة القوة
of global analytic	دالة تحليلية شاملة
of impulse	دالة النبض
of meromorphic	دالة جزئية التحليل

Function of potential	دالة الجهد
of power	دالة القوى
of stream	دالة الانسياب
of transfer	دالة التحويل
Fundamental theorem	النظرية الأساسية
of algebra	النظرية الأساسية للجهد
of calculus	النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

G

Gamma function	دالة جاما
Gauss function	دالة جاوس
mean value theorem	نظرية القيمة المتوسطة لجاو س
Geometric series	متسلسلة هندسية
Global analytic function	دالة تحليلية شاملة
Gradient	التدرج
Green's theorem	نظرية جرين

H

Hadamard's formula	صيغة هادمارد
Half plane of convergence	نصف مستوى التقارب
Harmonic conjugate	مرافق توافقي
function	دالة توافقية
Harnack's inequality	متباينة هاراناك
Heat flow	انسياب الحرارة

Heaviside function	دالة الهيفسايد
Holomorphic function	دالة تحليلية
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic	زائدي

I

Image	صورة
Imaginary	تخيلي
part	جزء تخيلي
unit	وحدة تخيلية
Incompressible	غير مضغوط
fluid flow	انسياب الموائع غير المضغوط
Infinity	غير منتهي
Injection	أحادي
Inside	داخلي
-outside theorem	نظرية الداخل والخارج
Intensity	شدة
Interference effect	تأخير التداخل
Interior	داخلي
Inverse theorem	نظرية الانعكاسية
transform	تحويل عكسي
Inversion	الانعكاسية
Irrotational	غير دوراني

Isolated	منعزل
Singularity point	نقطة شاذة منعزلة
Isotherm	معزول حرارياً

J

Jacobian matrix	مصفوفة جاكوبين
Jet flow	انسياب الطيران
Jordan arc theorem	نظرية منحنى جوردان
Joukowsky form	شكل جوكوفسكي

K

Katznelson	العالم كاتزنلسون

L

Lagrange's indentity	متطابقة لاجرانج
Laplace equation	معادلة لا بلاس
transform	تحويل لابلاس
Laurent series	متسلسلة لورنت
theorm	نظرية لورنت
Legendre polynomial	كثيرة الحدود للاجندر
Lemniscate	عيون القطة
L'Hopital's theorem	نظرية لوبيتال
Limit	نهاية
, one-sided	نهاية من جهة واحدة
rules	قواعد النهاية
Linear fractional transformation	التحويل الكسري الخطي

Line integral	تكامل خطي
Liouville's theorem	نظرية ليوفيل
Logarithm	لوغاريتم
Looman-Menchoff	العالم "لومان – منيكوف"

M

Maclaurin series	متسلسلة ماكلورين
Magnification	التكبير
Magnitude	كمية
Maximum principle	مبدأ القيم العظمى
Maxwell's equations	معادلات ماكسويل
Mean value theorem	نظرية القيمة المتوسطة
Menchoff	العالم مينكوف
Meromorphic function	دالة تحليلية جزئية
Minimum principle	مبدأ القيم الصغرى
Mittag-leffler	العالم ميتاج ليفلر
Mobius transformation	تحويل موبيس
Modulus	مقياس
Moment of dipole	عزم الإزدواج
Monodromy theorem	نظرية "موندرمي"
Monogenic	انفرادي
Morera's theorem	نظرية موريرا
Multiple connected	متعدد الترابط

Multiplet	متعدد الأقطاب
Multiplicative identity	عنصر الوحدة للضرب
inverse	المقلوب بالنسبة للضرب
Multivalued	متعدد القيم
function	دالة متعددة القيم

N

Natural boundary	محيط هندسي
Neighborhood	جوار
Noshiro-Warhawski theorem	نظرية ناشيرو – درشوفسكي

O

One-sided limit	النهاية من جهة واحدة
One-to-one	واحد إلى واحد (أحادي)
One-to-one locally	واحد إلى واحد محلياً
Onto	فوق
Open	مفتوح
Order	رتبة
Order of exponential	أسية
of a branch point	لنقطة الفرع
of a multiplet	متعدد الأقطاب
of a pole	القطب
of a zero	الجذر
Origin point	نقطة الأصل

Outside	خارجي

P

Parabola	قطع مكافئ
Parallelogram law	قانون ممتوازي الأضلاع
Parseval's identity Phase shift	متأرجحة "بارسيفيل"
Phase shift	إزاحة الطور
Picard's theorem	نظرية بيكارد
Piecewise smooth	أملس بتقطع
Point at infinity	نقطة عند اللانهاية
source	مصدر متمركز
Poisson kernel	نواة بواسون
integral formula	صيغة بواسون التكاملية
theorem	نظرية بواسون
Polar representation	تمثيل قطبي
Poles	أقطاب
Positive sense	ذات موجبة
Potential	جهد
field	حقل للجهد
Power function	دالة القوى
Principal branch	المقطع الرئيسي
value	القيمة الأساسية
Pringsheim's theorem	نظرية برينجشيم

Pws	أملس بتقطع

R

Radius of convergence	نصف قطر التقارب
Ratio test	اختبار النسبة
Real number	عدد حقيقي
part	جزئي حقيقي
Region	منطقة
Regular function	دالة منتظمة
point	نقطة منتظمة
Removable singularity point	نقطة شاذة قابلة للرفع
Residue theorem	نظرية الباقي
Riemann mapping theorem	نظرية ريمان للتصوير
sphere	كرة ريمان
surface	سطح ريمان
theorem	نظرية ريمان
Root of unity	جذور الوحدة
Rotation	الدوران
Rouche's theorem	نظرية روشيه
Rules of limits	قواعد النهايات

S

Schwarz christoffel formula	صيغة شفارتز -كريستوفل
lemma	تمهيدية شفارتز

Schwarz reflection principle	مبدأ شفارتز للانعكاس
Series Fourier	متسلسلة فوريه (فورير)
Shifting theorem	نظرية الإزاحات
Sine function	دالة الجيب
Singularities	النقاط الشاذة
Sink	مصب (مصرف)
Sinusoidal wave	موجة جيبية
Source	مصدر (المنبع)
strength	شدة المنبع
Speed value	قيمة سرعة
Stagnation point	نقطة ركود
Stereographic projection	اسقاط هندسي
Streamline	خط انسياب
Surjection	دالة غامرة
Symmetry principle	مبدأ التماثل

T

Tartaglia's method	طريقة تارتاجليا
Taylor series	متسلسلة "تايلور"
theorem	نظرية تايلور
Temperature	درجة الحرارة
Three-circles theorem	نظرية الثلاث دوائر
Transfer function	دالة التحويل

Translation	انسحاب (انتقال)
Triangle inequality	متباينة مثلثية

U

Unbounded	غير محدد
Uniform convergence	تقارب منتظم

V

Variation	تغير
Vector	متجه
Velocity vector	السرعة
Vortex source	مصدر دوامي

W

Wake	أثر
Wallis's formula	صيغة واليز
Wave equation	معادلة موجية
length	طول الموجة
Weierstrass theorem	نظرية "فايرستراس"
casorati theorem	نظرية كاسورتي – فايرستراس

Z

Zero derivative theorem	نظرية المشتقة المنعدمة
Zhukovski	العالم زايوكفسيكي

كشاف الموضوعات